Stochastics and Stochastics Reports, Vol. 47, pp. 1–20
Reprints available directly from the publisher
Photocopying permitted by license only

© 1994 Gordon and Breach Science Publishers S.A.
Printed in Malaysia

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

SUR CERTAINS PROCESSUS DE LÉVY CONDITIONNÉS À RESTER POSITIFS

L. CHAUMONT

Laboratoire de Probabilités, Tour 56, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

(Received 19 October 1992; in final form 13 April 1993)

One introduces first a probability distribution of Lévy process with no negative jumps and conditioned to be positive. With this distribution the process is decomposed at its minimum value. This result is then applied to describe the excursion measure of the reflecting initial Lévy process.

KEY WORDS: Spectrally positive Lévy processes, conditioning, decomposition of trajectories, reflected processes

1. INTRODUCTION

Une des nombreuses manières de relier le processus de Bessel de dimension 3 au mouvement brownien est de conditionner ce dernier à rester positif. On obtient ainsi la loi d'un processus de Bessel de dimension 3 mais un tel conditionnement ne peut pas avoir de sens probabiliste classique en raison des oscillations vers $-\infty$ du mouvement brownien qui rendent négligeable l'évènement "rester positif". Il a donc été introduit par Doob [9] comme le h-processus associé à la fonction surharmonique positive $h(x) = x, x \in \mathbb{R}_+$. Ces considérations s'étendent à d'autres processus de Lévy et notamment, dans une première partie, nous construirons la loi d'un processus de Lévy spectralement positif (sans saut négatif) conditionné à rester positif. Sous ces hypothèses, les fonctions surharmoniques auxquelles on a recours prennent une forme explicite permettant ainsi de mettre en évidence le lien qui existe entre le conditionnement au sens probabiliste et la théorie des h-processus par des convergences en loi.

Nous nous intéresserons dans une seconde partie à la décomposition trajectorielle du processus ainsi conditionné. Les travaux de Williams [24] ont montré que le processus de Bessel de dimension 3 issu de $x > 0$ possède, avant son minimum, la loi d'un mouvement brownien issu de x et après son minimum celle d'un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0. Cette relation de dualité entre processus initial et processus conditionné à rester positif se vérifie encore dans le cas plus général des processus de Lévy spectralement positifs. C'est du moins ce que nous montrerons en faisant appel en particulier aux travaux de Millar [18] décrivant la loi des processus markoviens conditionnellement à leur minimum.

Une autre application du conditionnement à rester positif sera de décrire la mesure des excursions du processus de Lévy spectralement positif réfléchi. Nous retrouverons, entre autres, l'analogue d'un théorème de Bismut [6] qui présente cette mesure dans le cas du mouvement brownien en fonction de la loi du processus de Bessel de dimension 3.

Je tiens à remercier Jean Bertoin pour toutes les discussions que nous avons eues au cours de ce travail et qui m'ont été très utiles.

2. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Nous nous sommes contentés pour la plupart des résultats suivants de donner leur principale référence.

Soit Ω l'espace des trajectoires c.à.d.l.à.g. $\omega: [0, \infty) \to \mathbb{R} \cup \{\delta\}$ de temps de vie $\zeta(\omega) = \sup\{t: \omega_t \neq \delta\}$ où δ est un état cimetière. Sur Ω, X sera le processus des coordonnées, θ l'opérateur de shift usuel et k l'opérateur de meurtre défini par,

$$\begin{cases} X_s(k_t(\omega)) = X_s(\omega) & \text{si} \quad s < t \\ X_s(k_t(\omega)) = \delta & \text{si} \quad s \geqslant t. \end{cases}$$

$\bar{X}$ et $\underline{X}$ désignerons respectivement les processus du maximum et du minimum définis pour tout $t < \zeta$ par,

$$\bar{X}_t = \sup\{X_s: 0 \leqslant s \leqslant t\},$$

$$\underline{X}_t = \inf\{X_s: 0 \leqslant s \leqslant t\}.$$

On notera ρ le dernier temps où X atteint son minimum, τ_A le premier temps d'entrée de X dans un borélien A de $\mathbb{R}$ et σ_A le dernier temps de sortie de A,

$$\rho = \sup\{s < \zeta: X_s = \underline{X}_s\},$$

$$\tau_A = \inf\{s > 0: X_s \in A\},$$

$$\sigma_A = \sup\{s < \zeta: X_s \in A\},$$

avec pour conventions,

$$\inf\{\varnothing\} = +\infty \quad \text{et} \quad \sup\{\varnothing\} = 0.$$

Ω sera muni de la topologie de Skohorod, de sa tribu borélienne $\mathscr{F}$ et de sa filtration naturelle $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$. Une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ est la loi d'un processus de Lévy si le processus canonique X sous $\mathbb{P}$ (nous le noterons $(X, \mathbb{P})$) est à accroissements indépendants et stationnaires avec de plus, $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{P}_x$ la loi sous $\mathbb{P}$ de $X + x$ et pour tout temps aléatoire T, on note $\mathbb{P}^T$ la loi de $X \circ k_T$ que nous appellerons le processus tué au temps T. Lorsque I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x \in I$, on simplifiera la notation $\mathbb{P}_x^{\tau_{I^c}}$ par $\mathbb{P}_x^I$. Rappelons que 0 est dit régulier pour un borélien A sous $\mathbb{P}$ si $\mathbb{P}(\tau_A = 0) = 1$. Enfin, $(X, \mathbb{P})$ est dit spectralement positif s'il ne possède pas de saut négatif, nous le noterons communément p.L.s.p.

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

Les résultats qui vont suivre nécéssitent l'expression suivante dûe à Takacs [23] et Emery [10] (voir aussi Rogers [20]) de la probabilité de sortie d'un ensemble $[a, b)$, $a < 0 \leqslant b$.

$$\mathbb{P}(\tau_{[b,\infty)} > \tau_a) = \frac{W(b)}{W(b-a)}, \tag{5}$$

où W est une fonction définie sur $[0, \infty)$, continue, strictement croissante, appelée fonction d'échelle et dont la transformée de Laplace est,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y} W(y) dy = \frac{1}{\psi(\alpha)}, \quad \alpha > \Phi(0). \tag{6}$$

Le théorème suivant est fondamental pour la suite, on pourra en trouver une démonstration dans Bingham [5]. Il décrit la loi de tout p.L.s.p. en des temps exponentiels indépendants comme une conséquence de la factorisation de Wiener-Hopf et des identités de Spitzer-Rogozin.

THÉORÈME 1 *Soit* $(X, \mathbb{P})$ *un p.L.s.p. et e une variable aléatoire indépendante qui suit une loi exponentielle de paramètre* 1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *les variables aléatoires* $\underline{X}_{e/\varepsilon}$ *et* $(X - \underline{X})_{e/\varepsilon}$ *sont indépendantes et,*

1_ $-\underline{X}_{e/\varepsilon}$ *suit une loi exponentielle de paramètre* $\Phi(\varepsilon)$.
2_ $(X - \underline{X})_{e/\varepsilon}$ *suit une loi notée* $q_\varepsilon(dx)$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *dont la transformée de Laplace est,*

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z} q_\varepsilon(dz) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \psi(\alpha)} \left(1 - \frac{\alpha}{\Phi(\varepsilon)}\right).$$

2_ *Il résulte de* 2_ *et de* (6) *que la mesure* $(\Phi(\varepsilon)/\varepsilon) q_\varepsilon(dx)$ *converge étroitement vers la mesure* $dW(x)$ *lorsque* $\varepsilon \downarrow 0$.

Remarquons que $(X, \mathbb{P}^{e/\varepsilon})$ est stable par retournement du temps et donc, dans l'énoncé précédent $(X - \underline{X})_{e/\varepsilon}$ peut être substitué à $-\underline{X}_{e/\varepsilon}$ et $\bar{X}_{e/\varepsilon}$ à $(X - \underline{X})_{e/\varepsilon}$. Ainsi, on tire de ce théorème une première conséquence due à Rogozin [21] sur la régularité de 0.

COROLLAIRE 1 (Rogozin) *Si* $(X, \mathbb{P})$ *est un p.L.s.p. alors,*

1_ 0 *est régulier pour* $(-\infty, 0)$,
2_ 0 *est régulier pour* $(0, \infty)$ *si et seulement si* $\sigma_o > 0$ *ou* $\int_0^1 z\pi(dz) = +\infty$.

3. PROCESSUS CONDITIONNÉ À RESTER POSITIF

Le processus de Bessel de dimension 3 a été construit par McKean [16] comme le mouvement brownien conditionné à converger vers $+\infty$ sans atteindre 0. Ce conditionnement que l'on appelle plus couramment le conditionnement à rester positif n'a pas de sens probabiliste direct car l'évènement "rester positif", qui est défini

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

A tout p.L.s.p. $(X, \mathbb{P})$, on associe l'exposant caractéristique ψ défini par,

$$\mathbb{E}(\exp - zX_t) = \exp(t\psi(z)), \quad \mathrm{Re} z \geqslant 0. \tag{1}$$

ψ est alors explicité par la formule de Lévy-Kintchine de la façon suivante:

$$\psi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma_0 z^2 + \int_0^\infty (e^{-zx} - 1 + zx1_{\{x<1\}})\pi(dx), \tag{2}$$

où $a \in \mathbb{R}, \sigma_0 \geqslant 0$ et π est une mesure positive sur $\mathbb{R}_+$ appelée mesure de Lévy du processus $(X, \mathbb{P})$ telle que $\int_0^\infty x^2 \wedge 1\pi(dx) < \infty$.

Par convergence monotone, on déduit de (1) que

$$\mathbb{E}(X_t) = -t\psi'(0). \tag{3}$$

D'autre part, d'après (2), $\psi'' \geqslant 0$. ψ est donc une fonction convexe et $\psi'(0) < +\infty$ ce qui entraîne que $\mathbb{E}(X_1) > -\infty$. Nous supposerons de plus que $\mathbb{E}(X_1) < +\infty$.

Rappelons que le comportement asymptotique des processus de Lévy se distingue suivant les trois cas exhaustifs suivants:

— $\lim_{t\to\infty} X_t = +\infty$, $\mathbb{P}$—p.s., $(X, \mathbb{P})$ dérive vers $+\infty$,

— $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$, $\mathbb{P}$—p.s., $(X, \mathbb{P})$ dérive vers $-\infty$,

— $\lim_{t\to\infty} \bar{X}_t = +\infty$ et $\lim_{t\to\infty} \underline{X}_t = -\infty$, $\mathbb{P}$—p.s., $(X, \mathbb{P})$ oscille.

Le comportement d'un p.L.s.p. se déduit alors d'une simple étude de sa fonction caractéristique au voisinage de 0. Désignons pour ceci par $\Phi(0)$ la plus grande racine réelle de l'équation $\psi(x) = 0$ et soit $\Phi: [0, \infty) \to [\Phi(0), \infty)$ l'inverse de $\psi: [\Phi(0), \infty) \to [0, \infty)$. On peut facilement vérifier qu'en l'absence de saut négatif $x \to \tau_{-x}, x \in \mathbb{R}_+$ est un subordinateur dont la transformée de Laplace d'après Bingham [5] est:

$$\mathbb{E}(\exp(-\alpha\tau_{-x})) = \exp(-x\Phi(\alpha)), \quad x \geqslant 0. \tag{4}$$

Alors en dérivant cette égalité par rapport à x en 0, on conclut que

— X dérive vers $+\infty$ si et seulement si $\Phi(0) > 0$,
— X dérive vers $-\infty$ si et seulement si $\Phi(0) = 0$ et $\Phi'(0+) < +\infty$,
— X oscille si et seulement si $\Phi(0) = 0$ et $\Phi'(0+) = +\infty$.

Il vient de (3) et des accroissements indépendants que $(X, \mathbb{P})$ est une sur-martingale s'il dérive vers $-\infty$, une sous-martingale s'il dérive vers $+\infty$ et une martingale s'il oscille.

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

formellement par $\{\underline{X}_\infty \geqslant 0\}$, est négligeable lorsque $\lim_{t\to\infty}\underline{X}_t = -\infty$ $\mathbb{P}$—p.s. Ceci rend alors impossible le calcul de la probabilité conditionnelle associée. On introduit donc la probabilité $\mathrm{P}_x^{(0,y)} = \mathbb{P}_x^{(0,y)}(\cdot\,|X_{\zeta-} = y)$, $0 < x < y$ qui est la loi sous $\mathbb{P}_x$ du processus conditionné à atteindre y avant 0 et tué lorsqu'il sort de l'intervalle $(0, y)$. Il est facile dès lors d'obtenir la limite lorsque y tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}_x^{(0,y)}$ sur chaque tribu $\mathscr{F}_t$ et de voir que celle-ci constitue la loi conditionnelle cherchée. Notons aussi que Bertoin [2] a remarqué qu'un conditionnement similaire est applicable à des processus de Lévy ne possédant pas de saut positif.

En présence de sauts positifs, la loi de $X_{\zeta-}$ est trop complexe pour reproduire ce calcul. Cette section sera consacrée à introduire un moyen, non moins intuitif, de conditionner un p.L.s.p. à rester positif. Remarquons d'abord que lorsque $\mathbb{P}$ est la loi d'un p.L.s.p. dérivant vers $+\infty$, le conditionnement à rester positif garde un sens naturel. On rappelle que $-\underline{X}_\infty$ suit une loi exponentielle de paramètre $\Phi(0)$ sous $\mathbb{P}$ et en appliquant la propriété de Markov on a pour tout $t \geqslant 0$ et tout $\Lambda \in \mathscr{F}_t$,

$$\mathbb{P}_x(\Lambda\,|\,\underline{X}_\infty \geqslant 0) = \mathbb{E}_x^{(0,\infty)}\left(1_\Lambda \cdot \frac{1 - e^{-\Phi(0)X_t}}{1 - e^{-\Phi(0)x}}\right). \tag{7}$$

On trouvera une étude plus détaillée de ce cas dans Bertoin [1].

Nous nous limiterons par la suite aux p.L .s.p. oscillants ou dérivant vers $-\infty$ (c'est à dire ceux pour lesquels $\lim_{t\to\infty}\underline{X}_t = -\infty$). Puisque l'on connaît, d'après le théorème 1, la loi de X en des temps exponentiels indépendants $\{\mathrm{e}/\varepsilon\colon \varepsilon \geqslant 0\}$, une manière naturelle d'approcher l'évènement $\{\underline{X}_\infty \geqslant 0\}$ par des évènements de $\mathbb{P}_x$-mesure non nulle est de considérer $\{\underline{X}_{\mathrm{e}/\varepsilon} \geqslant 0\}$ lorsque ε tend vers 0. La proposition suivante montre alors que la probabilité $\mathbb{P}_x^{\mathrm{e}/\varepsilon}(\cdot\,|\underline{X}_{\mathrm{e}/\varepsilon} \geqslant 0)$ converge en un sens relativement fort vers une mesure de probabilité $\mathbb{P}_x^\uparrow$ que nous appellerons la loi du p.L.s.p. issu de x conditionné à rester positif.

Sauf mention du contraire, dans cette partie $(X, \mathbb{P}_x)$ désignera toujours un p.L.s.p. issu de $x > 0$ et tel que $\lim_{t\to\infty}\underline{X}_t = -\infty$, $\mathbb{P}_x$—p.s.

PROPOSITION 1 *Pour tout* $t > 0$ *et* $\Lambda \in \mathscr{F}_t$,

$$\mathbb{P}_x^{\mathrm{e}/\varepsilon}(\Lambda, t < \zeta\,|\,\underline{X}_{\mathrm{e}/\varepsilon} \geqslant 0) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}_x^\uparrow(\Lambda, t < \zeta)$$

où $\mathbb{P}_x^\uparrow$ *est donnée par*:

$$\mathbb{P}_x^\uparrow(\Lambda, t < \zeta) = \frac{1}{x}\,\mathbb{E}_x^{(0,\infty)}(X_t 1_\Lambda 1_{\{t<\zeta\}}).$$

$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, X, \mathbb{P}_x^\uparrow)$ *est un processus fortement markovien d'état initial* x *dont le semi-groupe de transition est*

$$p_t^\uparrow(y, dz) = \frac{z}{y}\,p_t^{(0,\infty)}(y, dz),$$

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

où $p_t^{(0,\infty)}$ *désigne le semi-groupe de transition du processus* $(X, \mathbb{P}_x)$ *tué en son premier temps d'atteinte de* 0.

Preuve Puisque $\underline{X}_\zeta$ suit une loi exponentielle de paramètre $\Phi(\varepsilon)$ sous $\mathbb{P}^{e/\varepsilon}$, on a pour tout $t \geqslant 0$ et tout $\Lambda \in \mathscr{F}_t$,

$$\mathbb{P}_x^{e/\varepsilon}(\Lambda, t < \zeta \,|\, \underline{X}_{\zeta-} \geqslant 0) = \frac{1}{1 - e^{-\Phi(\varepsilon)x}} \mathbb{P}_x^{e/\varepsilon}(\Lambda, t < \zeta, \underline{X}_{\zeta-} \geqslant 0)$$

et par la propriété de Markov en t,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x^{e/\varepsilon}(\Lambda, t < \zeta \,|\, \underline{X}_{\zeta-} \geqslant 0) &= \mathbb{E}_x^{e/\varepsilon}\left(1_\Lambda 1_{\{t < \tau_0 \wedge \zeta\}} \frac{\mathbb{E}_x^{e/\varepsilon}(\underline{X}_\zeta \circ \theta_t \geqslant 0 \,|\, \mathscr{F}_t)}{1 - e^{-\Phi(\varepsilon)x}}\right) \\ &= \mathbb{E}_x\left(1_\Lambda 1_{\{t < \tau_0 \wedge e/\varepsilon\}} \frac{1 - e^{-\Phi(\varepsilon)X_t}}{1 - e^{-\Phi(\varepsilon)x}}\right).\end{aligned}$$

Enfin sous la condition $\lim_{t \to \infty} X_t = -\infty$ on a $\Phi(0) = 0$, par conséquent,

$$\frac{1 - e^{-\Phi(\varepsilon)X_t}}{1 - e^{-\Phi(\varepsilon)x}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{X_t}{x}, \quad \mathbb{P}_x\text{—p.s.} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_x(t < \tau_0 \wedge e/\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}_x(t < \tau_0).$$

On en déduit la convergence:

$$\mathbb{P}_x^{e/\varepsilon}(\Lambda, t < \zeta \,|\, \underline{X}_\zeta \geqslant 0) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x} \mathbb{E}_x^{(0,\infty)}(X_t 1_\Lambda 1_{\{t < \zeta\}}).$$

Posons,

$$\mathbb{P}_x^\uparrow(\Lambda, t < \zeta) = \frac{1}{x} \mathbb{E}_x^{(0,\infty)}(X_t 1_\Lambda 1_{\{t < \zeta\}})$$

la loi $\mathbb{P}_x^\uparrow$ est alors celle du h-processus associé à la fonction surharmonique $h(y) = y$, $y \in \mathbb{R}_+$ pour le semi-groupe $p_t^{(0,\infty)}$. Et l'on sait dans ce cas (voir Dellacherie-Meyer [7]) que $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, X, \mathbb{P}_x^\uparrow)$ est un processus fortement markovien. ■

La proposition précédente introduit le processus conditionné à rester positif sans distinguer le cas où il dérive vers $-\infty$ sous $\mathbb{P}_x$ de celui où il oscille. Il existe pourtant une différence notable concernant la durée de vie du processus sous $\mathbb{P}_x^\uparrow$ qui est finie lorsqu'il dérive vers $-\infty$ sous $\mathbb{P}_x$ et infinie s'il oscille sous $\mathbb{P}_x$. En théorie des h-processus, ceci revient à dire que lorsque X oscille sous $\mathbb{P}_x$ la fonction $h(y) = y$, $y \in \mathbb{R}_+$ est non seulement excessive mais aussi invariante pour le semi-groupe $p_t^{(0,\infty)}$. On le vérifie en remarquant que dans ce cas $\{X_t 1_{\{t < \zeta\}}, \mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ est une martingale positive sous $\mathbb{P}_x^{(0,\infty)}$. En effet, nous avons déjà remarqué en 1_ que $\{X_t, \mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ est une $\mathbb{P}_x$-martingale et, par application du théorème d'arrêt, il en est de même de $\{X_t^{\tau_0}, \mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$. En l'absence de saut négatif, le processus $(X_t^{\tau_0})_{t \geqslant 0}$ reste positif et sa loi sous $\mathbb{P}_x$ est la même que celle de $(X_t 1_{\{t < \zeta\}})_{t \geqslant 0}$ sous $\mathbb{P}_x^{(0,\infty)}$.

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

Nous ferons souvent usage de la proposition suivante explicitant le potentiel de Green du processus $(X, \mathbb{P}_x^\uparrow)$.

PROPOSITION 2 *Pour toute fonction f définie sur* $\mathbb{R}_+$, *continue et à support compact,*

$$\mathbb{E}_x^\uparrow\left(\int_0^\zeta f(X_t)dt\right) = \int_0^\infty f(y)\mathbb{P}_x^\uparrow(\tau_y < \zeta)W(y)dy$$

avec,

$$\mathbb{P}_x^\uparrow(\tau_y < \zeta) = \frac{y(W(y) - W(y-x)1_{\{y \geq x\}})}{xW(y)}, \quad y > 0.$$

On pose pour la suite $\mathbb{P}_x^\uparrow(\tau_y < \zeta) = g(x, y)$.

Preuve Si e désigne à nouveau un temps exponentiel indépendant de $(X, \mathbb{P}_x)$ de paramètre 1 alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x^\uparrow\left(\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} f(X_t)dt\right)\\
&= \frac{1}{\varepsilon x}\mathbb{E}_x(f(X_{e/\varepsilon})X_{e/\varepsilon}1_{\{\underline{X}_{e/\varepsilon} \geq 0\}})\\
&= \frac{1}{\varepsilon x}\mathbb{E}(f(X_{e/\varepsilon} - \underline{X}_{e/\varepsilon} + \underline{X}_{e/\varepsilon} + x)(X_{e/\varepsilon} - \underline{X}_{e/\varepsilon} + \underline{X}_{e/\varepsilon} + x)1_{\{\underline{X}_{e/\varepsilon} > -x\}}).
\end{aligned}$$

Connaissant d'après le théorème 1 les lois de $\underline{X}_{e/\varepsilon}$ et de $X_{e/\varepsilon} - \underline{X}_{e/\varepsilon}$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^\uparrow\left(\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} f(X_t)dt\right) &= \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon x}\int_0^\infty \int_0^\infty f(z - y + x)(z - y + x)1_{\{y < x\}}e^{-\Phi(\varepsilon)y}dy\, q_\varepsilon(dz)\\
&= \frac{e^{-\Phi(\varepsilon)x}}{x}\int_0^\infty e^{\Phi(\varepsilon)u}uf(u)du \int_{(u-x)\vee 0}^u e^{-\Phi(\varepsilon)z}\frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon}q_\varepsilon(dz)
\end{aligned}$$

dont la limite lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ en vertu du théorème 1 est:

$$\mathbb{E}_x^\uparrow\left(\int_0^\infty f(X_t)dt\right) = \frac{1}{x}\int_0^\infty uf(u)(W(u) - W(u-x)1_{\{u \geq x\}})du.$$

Il reste le calcul de $\mathbb{P}_x^\uparrow(\tau_y < \zeta)$. Un résultat de Rogers [19] atteste que

$$\mathbb{P}_x(\text{Il existe } t > 0 \text{ tel que } X_t > X_{t-} = \bar{X}_{t-}) = 0.$$

Autrement dit un saut de X ne peut pas avoir lieu à l'instant où celui-ci atteint son maximum. Cette dernière propriété, l'absence de saut négatif et le fait que $\lim_{t\to\infty}\underline{X}_t = -\infty$ suffisent à justifier que pour tout $y > 0$, $\mathbb{P}_x$—p.s., sur l'ensemble $\{\tau_y < \zeta\}$ on a $X_{\tau_y} = y$. Et puisque les relations données en proposition 1 s'étendent d'après

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

Dellacherie-Meyer [7] à tout temps d'arrêt de la famille $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, il vient,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x^{\uparrow}(\tau_y<\zeta)&=\frac{1}{x}\mathbb{E}_x^{(0,\infty)}(X_{\tau_y}1_{\{\tau_y<\zeta\}})\\&=\frac{y}{x}\mathbb{P}_x^{(0,\infty)}(\tau_y<\zeta)\\&=\frac{y}{x}\mathbb{P}(\tau_{[y-x,\infty]}<\tau_{-x})\\&=\frac{y(W(y)-W(y-x)1_{\{y\geqslant x\}})}{xW(y)}\end{aligned}$$

d'après le résultat (5) rappelé dans la seconde partie. ∎

Voici comme première application, un résultat permettant de fixer les idées sur l'allure générale de la trajectoire du processus sous $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ dans les deux cas qui nous préoccupent.

COROLLAIRE 2 *Sous les mêmes hypothèses qu'en proposition 2, on distingue les deux cas suivants.*

Si X oscille sous $\mathbb{P}_x$ alors

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_0=x;\zeta=\infty;\lim_{t\to\infty}X_t=+\infty;X_t>0,\ \textit{pour tout}\ t>0)=1.$$

Si X dérive vers $-\infty$ sous $\mathbb{P}_x$ alors

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_0=x;\zeta<\infty;X_t>0,\ \textit{pour tout}\ 0<t<\zeta)=1.$$

Remarques 1_ Par définition de la loi $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$, le processus $(X,\mathbb{P}_x^{\uparrow})$ ne possède que des sauts positifs tout comme $(X,\mathbb{P}_x)$. De plus, pour tout $t\geqslant 0$, $\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_t>X_{t-})=0$.
2_ Dans le cas oscillant, on retrouve pour le processus $(X,\mathbb{P}_x^{\uparrow})$ les mêmes propriétés trajectorielles que celles du processus de Bessel de dimension 3 et issu de x.

Preuve Il vient de la définition de $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ que $\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_0=x)=1$ et de la proposition 2 que

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(\tau_0<\zeta)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_x^{\uparrow}(\tau_{1/n}<\zeta)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx}=0.$$

D'autre part, nous avons déjà remarqué que $\mathbb{P}_x^{\uparrow}(\zeta=\infty)=1$ ou 0 suivant que X oscille ou dérive vers $-\infty$ sous $\mathbb{P}_x$.

Enfin, en étendant par densité aux fonctions indicatrices la valeur du potentiel de Green connue pour toute fonction continue à support compact (proposition 2), on obtient que pour tout $y\geqslant 0$,

$$\mathbb{E}_x^{\uparrow}\left(\int_0^{\zeta}1_{\{X_t\in[0,y]\}}dt\right)<+\infty.$$

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

Supposons maintenant que $(X, \mathbb{P}_x)$ oscille. Lorsque 0 n'est pas régulier pour $(0, \infty)$ sous $\mathbb{P}$, on montre facilement que y est transient (i.e. $\mathbb{P}_y^{\uparrow}(\sigma_y < \infty) = 1$) et puisque $(X, \mathbb{P}_x^{\uparrow})$ ne passe qu'un temps fini dans l'intervalle $[0, y]$, il se trouve que $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ – p.s., il existe $t > 0$ tel que pour tout $s > t$ on ait $X_s > y$. On conclut que $\lim_{t\to\infty} X_t = +\infty$, $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$—p.s.
Si 0 est régulier pour $(0, \infty)$ sous $\mathbb{P}$ alors notons L le temps local en y de $(X, \mathbb{P}_y^{\uparrow})$, S l'inverse continu à droite de L et μ la mesure des excursions hors de y. Soit $R(e)$ le temps d'atteinte de (y, ∞) par une excursion e. Pour tout $t \geqslant 0$ on note e_t l'excursion entre S_{t-} et S_t alors,

$$\mathbb{E}_y^{\uparrow}\left(\int_0^\infty 1_{\{X_t\in[0,y]\}}dt\right) = \mathbb{E}_y^{\uparrow}\left(\sum_{t,S_{t-}\neq S_t} \tau_{(y,\infty)}(e_t)\right)$$
$$= \mu(R)\mathbb{E}_y^{\uparrow}(L_\infty) < +\infty.$$

Donc $L_\infty < +\infty$, $\mathbb{P}_y^{\uparrow}$—p.s. et y est transient. La conclusion est la même que dans le cas où 0 n'est pas régulier pour $(0, \infty)$ sous $\mathbb{P}$. ■

Jusqu'ici, nous nous sommes efforcés de faire le lien entre le conditionnement d'une mesure de probabilité au sens de la théorie des h-processus et son conditionnement au sens naturel. Ce lien n'est pas toujours aussi étroit comme le montre l'exemple suivant. Nous allons associer à certains p.L.s.p. dérivant vers $-\infty$ un h-processus positif et à durée de vie infinie. Ceci pourra alors être considéré comme une seconde manière de conditionner un p.L.s.p. à rester positif.

Considérons une loi Q qui fait du processus canonique un p.L.s.p. dérivant vers $+\infty$. On sait qu'alors il existe un unique réel $q > 0$ tel que $E_Q(e^{-qX_1}) = 1$. On peut donc définir la probabilité Q^* par la relation:

$$Q^*(\Lambda_t) = E_Q(e^{-qX_t}1_{\Lambda_t}), \quad t > 0, \quad \Lambda_t \in \mathscr{F}_t.$$

Q^* est en fait la loi du h-processus associé à la fonction e^{-qy}, $y \in \mathbb{R}$ qui est harmonique positive sous Q. On montre alors qu'il s'agit de la loi d'un p.L.s.p. dérivant vers $-\infty$. On pourra consulter pour ceci les références [8] et [1].

Prenons maintenant $\mathbb{P} = Q^*$ alors la loi ${}^*\mathbb{P}$ définie par,

$$ {}^*\mathbb{P}(\Lambda_t) = \mathbb{E}(e^{qX_t}1_{\Lambda_t}), \quad t > 0, \quad \Lambda_t \in \mathscr{F}_t \tag{8}$$

est celle d'un p.L.s.p. dérivant vers $+\infty$ et vérifiant $\Phi(0) = q$. On dit alors que la loi ${}^*\mathbb{P}$ est obtenue en conditionnant le processus sous $\mathbb{P}$ à dériver vers $+\infty$.

Tous les p.L.s.p. $(X, \mathbb{P})$ dérivant vers $-\infty$ ne possèdent pas cette propriété mais la construction que nous venons de faire à partir de Q montre qu'il en existe certains. Donnons nous un tel processus $(X, \mathbb{P})$, on peut le conditionner à rester positif en le conditionnant d'abord à dériver vers $+\infty$ comme en (8), puis en effectuant pour ce nouveau processus le conditionnement vu en (7). On obtient comme ceci la loi,

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(\Lambda_t) = \mathbb{E}_x^{(0,\infty)}\left(\frac{e^{\Phi(0)X_t} - 1}{e^{\Phi(0)x} - 1}1_{\Lambda_t}\right), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad \Lambda_t \in \mathscr{F}_t$$

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

du h-processus associé à la fonction $e^{\Phi(0)y}-1$, $y\in\mathbb{R}_+$ qui est harmonique positive sous $\mathbb{P}_x^{(0,\infty)}$. Remarquons que celle-ci a aussi été déterminée par Silverstein [22] comme l'une des deux seules fonctions harmoniques positives associées à $\mathbb{P}_x^{(0,\infty)}$. La loi $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ ainsi définie possède alors de toute évidence la propriété suivante,

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_0=x;\zeta=\infty;\lim_{t\to\infty}X_t=+\infty;X_t>0,\text{ pour tout }t>0)=1.$$

4. DÉCOMPOSITION DU PROCESSUS $(X,\mathbb{P}_x^{\uparrow})$ EN SON MINIMUM

Nous entendrons par décomposition en son minimum du processus canonique, la donnée des deux processus définis sur Ω suivants:

$\{X_t, t<\rho\}=X\circ k_\rho$ que nous appellerons le processus pré-minimum,

$\{X_{t+\rho}-X_{\rho-}, t\geqslant 0\}=X\circ\theta_\rho-X_{\rho-}$ que nous appellerons le processus post-minimum.

Cette définition n'a d'intérêt que lorsque le minimum absolu ρ est presque sûrement strictement inférieur au temps de vie ζ ce qui n'est pas vérifié dans le cas où $(X,\mathbb{P}_x^{\uparrow})$, $x>0$ possède un temps de vie fini. *Nous ne considérerons donc dans toute la suite que le cas où $(X,\mathbb{P}_x^{\uparrow})$ est obtenu en conditionnant à rester positif un p.L.s.p. oscillant.* En étendant la décomposition de Williams [24] du processus de Bessel de dimension 3 à $(X,\mathbb{P}_x^{\uparrow})$ nous montrerons que le processus pré-minimum possède la loi du processus de Lévy initial conditionnellement à $X_{\rho-}$ et que la loi du processus post-minimum est définie par la limite en un sens que nous préciserons de $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ lorsque x tend vers 0.
Commençons par donner la loi du processus en son minimum dont vont dépendre les lois des processus pré-minimum et post-minimum. La seule difficulté concerne le saut $X_\rho-X_{\rho-}$ qui n'existe que lorsque 0 n'est pas régulier pour $(0,\infty)$ sous $\mathbb{P}$.

PROPOSITION 3 *En son minimum, le processus $(X,\mathbb{P}_x^{\uparrow})$ a le comportement suivant.*

1_ *Sous $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$, $X_{\rho-}$ est uniformément distribuée sur $[0,x]$.*

2_ *$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_\rho=X_{\rho-})=1$ si 0 est régulier pour $(0,\infty)$ sous $\mathbb{P}$ et 0 sinon.*

3_ *Si 0 n'est pas régulier pour $(0,\infty)$ sous $\mathbb{P}$ alors le saut $X_\rho-X_{\rho-}$ de $(X,\mathbb{P}_x^{\uparrow})$ en son minimum est indépendant de $X_{\rho-}$, sa loi ne dépend pas de x et est donnée par,*

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_\rho-X_{\rho-}\in dz)=\frac{z\pi(dz)}{\int_0^\infty u\pi(du)},\quad z\geqslant 0.$$

Nous la noterons $\nu(dz)$.

Preuve 1_ se déduit de la proposition 2,

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_{\rho-}<y)=\mathbb{P}_x^{\uparrow}(\tau_y<\infty)=\frac{y}{x},\quad 0\leqslant y\leqslant x.$$

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

Millar [18] a montré que les processus pré et post-minimum définis précédemment sont indépendants sous $\mathbb{P}_x^{e/\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ (voir aussi Greenwood-Pitman [12] pour une approche par la théorie des excursions). Il apparaît aussi dans Millar [18] que $\mathbb{P}_x^{e/\varepsilon}(X_\rho \neq X_{\rho-}) = 0$ ou 1 suivant que 0 est régulier ou non pour $(0, \infty)$. Enfin la convergence établie en proposition 1 de $\mathbb{P}_x^{e/\varepsilon}(\cdot | X_{\rho-} \geqslant 0)$ vers $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ montre que ces propriétes restent vraies sous $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$.

Il reste à calculer la loi du saut $X_\rho - X_{\rho-}$ sous $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$. Il découle de l'indépendance des processus pré et post-minimum que

$$\mathbb{P}_x^{e/\varepsilon}(X_\rho - X_{\rho-} \in da, X_{\rho-} \geqslant 0) = \mathbb{P}^{e/\varepsilon}(X_\rho - X_{\rho-} \in da)\mathbb{P}^{e/\varepsilon}(X_{\rho-} \geqslant -x).$$

D'autre part, le théorème 3.1 de Bertoin [4] entraîne que sous $\mathbb{P}^{e/\varepsilon}$, le premier saut à travers 0, $X_{\tau_{[0,\infty)}} - X_{\tau_{[0,\infty)}-}$, et le saut à l'instant du minimum, $X_\rho - X_{\rho-}$, ont même loi.

Enfin, il vient de la proposition 1 que la loi de $X_\rho - X_{\rho-}$ sous $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ est la même que celle du premier saut de X à travers 0 sous $\mathbb{P}$. Or on déduit facilement du corollaire 2 de Bertoin [3] que

$$\mathbb{P}_x^{\uparrow}(X_{\tau_{[0,\infty)}} - X_{\tau_{[0,\infty)}-} \in dz) = \frac{z\pi(dz)}{\int_0^\infty u\pi(du)} = \nu(dz), \quad z \geqslant 0. \qquad \blacksquare$$

Il reste à déterminer les lois de $X \circ k_\rho$ et $X \circ \theta_\rho - X_{\rho-}$ sous $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$. Nous verrons que ces deux processus, dont nous avons déjà montré qu'ils sont indépendants (preuve précédente), sont aussi markoviens. Le premier possède pour loi de sortie celle de $X_{\rho-}$ et l'autre pour loi initiale celle de $X_\rho - X_{\rho-}$. La loi du processus pré-minimum s'obtiendra en calculant la projection duale prévisible de la masse de Dirac en ρ (c.à.d. de la mesure dA_s associée au processus $A_s = 1_{\{s > \rho\}}$). Quant à celle du processus post-minimum, elle est presque entièrement déterminée par la proposition 4.1 de Millar [18] qui assure qu'il est fortement markovien et donne son semi-groupe de transition.

Le théorème de décomposition suivant est le résultat principal de cette section. On y retrouve en particulier la décomposition des processus de Bessel donnée par Williams.

THÉORÈME 2 $(X, \mathbb{P}_x^{\uparrow})$ *admet en son minimum la décomposition en les deux processus markoviens et indépendants suivants,*

1_ *le processus pré-minimum* $X \circ k_\rho$ *qui, sous* $\mathbb{P}_x^{\uparrow}(\cdot | X_{\rho-} = m)$, *a la loi de* $X \circ k_{\tau_m}$ *sous* $\mathbb{P}_x$,

2_ *le processus post-minimum* $X \circ \theta_\rho - X_{\rho-}$ *qui a pour semi-groupe de transition celui de* $(X, \mathbb{P}_x^{\uparrow})$ *et pour loi initiale* $\delta_0(dz)$ *ou* $\nu(dz)$ *suivant que* 0 *est régulier ou non pour* $(0, \infty)$ *sous* $\mathbb{P}$. *Nous noterons sa loi* $\mathbb{P}^{\uparrow}$.

Preuve Pour montrer 1_ il suffit de calculer $\mathbb{E}_x^{\uparrow}(H_\rho)$ pour tout processus prévisible H. Posons $A_s = 1_{\{s > \rho\}}$ et notons respectivement ${}^\circ A$ et A^p sa projection optionnelle et sa projection duale prévisible. On a,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x^{\uparrow}(A_s | \mathscr{F}_s) &= \mathbb{P}_x^{\uparrow}(\underline{X}_s < X_{\rho-} \circ \theta_s | \mathscr{F}_s) \\ &= \mathbb{P}_{x_s}^{\uparrow}(X_{\rho-} > y)_{|y = \underline{X}_s} \\ &= 1 - \frac{\underline{X}_s}{X_s} = {}^\circ A_s\end{aligned}$$

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

et

$$d^{\circ}A_s = -\frac{d\underline{X}_s}{\underline{X}_s} - \underline{X}_s d\frac{1}{X_s}.$$

On vérifie facilement que $\{\frac{1}{X_t}, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ est une $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$-martingale locale et puisque A^p est l'unique processus prévisible tel que ${}^{\circ}A - A^p$ soit une martingale locale, la projection duale prévisible de A_s est,

$$dA_s^p = -\frac{d\underline{X}_s}{\underline{X}_s}.$$

En l'absence de saut négatif on a pour tout $u < x$,

$$\tau_u = \inf\{s > 0 : \underline{X}_s = u\}$$

alors par changement de variables,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{\uparrow}\left(\int_0^{\infty} H_s dA_s\right) &= -\mathbb{E}_x^{\uparrow}\left(\int_0^{\infty} H_s \frac{d\underline{X}_s}{\underline{X}_s}\right)\\
&= \mathbb{E}_x^{\uparrow}\left(\int_0^{x} H_{\tau_u} 1_{\{\tau_u < \infty\}} \frac{du}{u}\right)\\
&= \frac{1}{x}\int_0^{x} du\, \mathbb{E}_x(H_{\tau_u} 1_{\{\tau_u < \tau_0\}})\\
&= \mathbb{E}_x^{\uparrow}(\mathbb{E}_x(H_{\tau_u})_{|u = X_{\rho-}})
\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire,

$$\mathbb{E}_x^{\uparrow}(H_\rho | X_{\rho-} = m) = \mathbb{E}_x(H_{\tau_m})$$

et montre l'identité en loi énoncée en 1_.

Le semi-groupe de transition du processus post-minimum se déduit directement de la proposition 4.1 de Millar [18],

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x^{\uparrow}(f(X_{\rho+t} - X_{\rho-}) | X_{\rho+s} - X_{\rho-} = u, X_{\rho-} = a)\\
&= \frac{u+a}{u}\mathbb{E}_{u+a}^{\uparrow}\left(\frac{X_{t-s} - a}{X_{t-s}} f(X_{t-s} - a) 1_{\{t-s<\tau_a\}}\right)\\
&= \frac{1}{u}\mathbb{E}_u(X_{t-s} f(X_{t-s}) 1_{\{t-s<\tau_0\}})\\
&= \mathbb{E}_u^{\uparrow}(f(X_{t-s})),
\end{aligned}$$

où $a, u \in (0, \infty)$ et f est une fonction mesurable et bornée. Quant à sa loi initiale, elle est évidemment donnée par la proposition 3. ∎

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

Intéressons nous maintenant au comportement de la loi $\mathbb{P}_x^\uparrow$ lorsque x tend vers 0. Cette dernière n'a pu être définie en $1\_$ que pour $x > 0$ et nous allons déterminer sa limite en 0. Ceci constitue une première application de la décomposition en le minimum énoncée au théorème précédent. Il suffira en effet d'observer que la loi du processus post-minimum ne dépend pas de x alors que le processus pré-minimum tend à disparaître en un certain sens lorsque x tend vers 0. Le résultat suivant établit que la loi limite cherchée correspond à celle du processus post-minimum, $\mathbb{P}^\uparrow$.

THÉORÈME 3 *Soit* $\{\mathbb{P}_x^\uparrow, x > 0\}$ *la famille de lois construite en conditionnant* $(X, \mathbb{P}_x)$ *à rester positif pour chaque* $x > 0$.

—*Si* 0 *est régulier pour* $(0, \infty)$ *sous* $\mathbb{P}$ *alors* $\{\mathbb{P}_x^\uparrow, x > 0\}$ *converge au sens de Skohorod vers* $\mathbb{P}^\uparrow$ *lorsque* $x \downarrow 0$,

—*sinon, pour tout* $\varepsilon > 0$, *la loi du processus* $(X \circ \theta_\varepsilon, \mathbb{P}_x^\uparrow)$ *converge au sens de Skohorod vers celle du processus* $(X \circ \theta_\varepsilon, \mathbb{P}^\uparrow)$ *lorsque* $x \downarrow 0$.

Preuve Soit $(\Omega', \mathscr{F}', P)$ un espace probabilisé suffisamment grand pour que l'on puisse y définir un processus Y de loi $\mathbb{P}$, un processus Z de loi $\mathbb{P}^\uparrow$ et une variable aléatoire γ uniformément distribuée sur $[0, 1]$ qui soient deux à deux indépendants.

Si l'on pose pour tout $x > 0$,

$$\rho^x = \inf\{t \geqslant 0 : Y_t + x = x\gamma\} \quad \text{et} \quad X^x = \begin{cases} Y_t + x & t < \rho^x \\ Z_{t-\rho^x} + x\gamma & t \geqslant \rho^x \end{cases}$$

alors, d'après le théorème précédent, X^x a pour loi $\mathbb{P}_x^\uparrow$ sous P. On vérifie facilement que,

$$\rho^x \xrightarrow{x \to 0} 0, \quad P\text{—p.s.}$$

et par conséquent que la loi de X^x converge vers celle de Z dans le cas où 0 est régulier. Si 0 n'est pas régulier, la limite obtenue n'est pas une loi sur Ω mais les mêmes arguments montrent que pour tout $\varepsilon > 0$, la loi de $X^x \circ \theta_\varepsilon$ tend vers celle de $Z \circ \theta_\varepsilon$. ■

Remarquons que Bertoin [4] a donné une construction trajectorielle du processus $(X, \mathbb{P}^\uparrow)$ à partir du processus de Lévy initial.

Pour compléter l'étude de la loi $\mathbb{P}^\uparrow$, il serait bon de préciser la loi d'entrée du processus $(X, \mathbb{P}^\uparrow)$. Remarquons d'abord que dans le cas où 0 n'est pas régulier pour $(0, \infty)$ sous $\mathbb{P}$, celle-ci est entièrement déterminée par la loi d'entrée des processus $(X, \mathbb{P}_x^\uparrow)_{x>0}$ et la mesure ν qui ne charge que $(0, \infty)$. Dans le cas régulier, nous allons la caractériser par la loi de $X_{e/\varepsilon}$ sous $\mathbb{P}^\uparrow$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui fait appel à la convergence établie au théorème précédent. En effet, reprenons la formule:

$$\mathbb{E}_x^\uparrow(f(X_{e/\varepsilon})) = \frac{e^{-\Phi(\varepsilon)x}}{x} \int_0^\infty e^{\Phi(\varepsilon)u} u f(u) du \int_{(u-x)\vee 0}^u e^{-\Phi(\varepsilon)z} \Phi(\varepsilon) q_\varepsilon(dz)$$

obtenue dans la preuve de la proposition 2 pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction f continue à support compact. Faisons tendre x vers 0 dans cette expression, on obtient:

$$\mathbb{E}^\uparrow(f(X_{e/\varepsilon})) = \int_0^\infty f(u) \Phi(\varepsilon) u q_\varepsilon(du).$$

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

PROPOSITION 4 *Lorsque* 0 *est régulier pour* $(0, \infty)$ *sous* $\mathbb{P}$, *on a pour tout* $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}^{\uparrow}(X_{\mathbf{e}/\varepsilon} \in dx) = \Phi(\varepsilon) x q_{\varepsilon}(dx), \quad x \geqslant 0.$$

5. UNE DESCRIPTION DE LA MESURE D'EXCURSION DU PROCESSUS RÉFLÉCHI $X - \underline{X}$

On s'intéresse ici à la description de la mesure $\underline{n}$ des excursions hors de zéro du processus $X - \underline{X}$ lorsque $(X, \mathbb{P})$ vérifie les mêmes hypothèses qu'en 4. Une des raisons qui motivent cette étude est que 0 est régulier pour $(-\infty, 0)$ sous $\mathbb{P}$ et donc 0 est régulier pour lui même pour le processus $X - \underline{X}$. De plus, $-\underline{X}$ est une fonctionnelle additive pourle processus $X - \underline{X}$ qui croît et ne croît que sur l'ensemble des zéros de $X - \underline{X}$, elle constitue donc une forme explicite du temps local en 0 de ce processus. Signalons que le cas de la mesure $\bar{n}$ des excursions du processus $\bar{X} - X$ a déjà été étudié par Bertoin [2]. Dans le cas brownien, la mesure $\underline{n}$ qui s'identifie par le théorème de Lévy à la mesure des excursions positives a déjà fait l'objet de plusieurs descriptions. Parmi celles-ci, citons celle d'Ito et Mc Kean [15] qui identifie $\underline{n}$ à la loi d'un pont de Bessel de dimension 3 conditionnellement à sa longueur. Un autre exemple est fourni par Williams [24] qui décompose l'excursion générique $X - \underline{X}$ en son maximum en deux processus de Bessel de dimension 3, issus de 0, allant à l'encontre l'un de l'autre et tués lorsqu'ils atteignent pour la première fois une même variable aléatoire indépendante. Nous nous inspirerons dans ce qui suit de la description donnée par Bismut [6] de la mesure $dt\, 1_{\{t<V\}} d\underline{n}^t$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ où V désigne le temps de vie des excursions. Cette mesure se décompose en les lois de deux processus de Bessel de dimension 3, issus de 0, indépendants, allant aussi à l'encontre l'un de l'autre et tués lorsqu'ils atteignent pour la dernière fois une même variable aléatoire indépendante et distribuée suivant $1_{\{a \geqslant 0\}} 2da$.

Il est facile de voir que lorsque 0 est irrégulier pour $(0, \infty)$, l'excursion générique du processus $X - \underline{X}$ possède un saut à l'origine et que conditionnellement à $X_0 = x$, la mesure $\underline{n}$ est égale à $\mathbb{P}_x^{(0,\infty)}$. Nous écartons donc ce cas trivial à partir de maintenant.

Par conséquent, toute la suite concerne un p.L.s.p. $(X, \mathbb{P})$ *oscillant sous l'hypothèse que* 0 *est régulier pour* $(0, \infty)$. Nous aurons à étudier des mesures positives, σ-finies, non nécéssairement bornées, auxquelles on devra étendre les quelques notions élémentaires de probabilités suivantes.

Soit m une mesure positive, σ-finie sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ et $(S, \mathscr{B}_S)$ un espace métrique muni de sa tribu borélienne.

—On dira qu'une variable aléatoire Y définie sur $(E, \mathscr{E})$ à valeurs dans $(S^n, \mathscr{B}_S^{\otimes n})\, n \geqslant 1$, a pour loi la mesure positive, σ-finie α sur S^n si pour toute fonction f borélienne, positive, bornée définie sur S^n on a,

$$\int_E f(Y) dm = \int_{S^n} f(y) \alpha(dy).$$

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

—Pour tout $A \in \mathscr{E}$ tel que $0 < m(A) < \infty$ et tout $B \in \mathscr{E}$, on notera $m(B \cap A)/m(A)$ par $m(B|A)$. On notera aussi $m(\cdot, A)$ la mesure $m(B, A) = m(B \cap A)$ et pour toute variable aléatoire réelle positive Z définie sur $(E, \mathscr{E})$ on notera $m(\cdot Z)$ la mesure $m(\cdot Z) = \int_E \cdot Z dm$.

Considérons d'abord la mesure $\int_0^\infty dt\ \mathbb{P}^t$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ que les définitions précédentes permettent d'interpréter comme la loi $\mathbb{P}^T$ de X tué en un temps T indépendant et distribué suivant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ et introduisions pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} g_t(\omega) &= \sup\{s \leqslant t : \underline{X}_s = X_s\}, \\ d_t(\omega) &= \inf\{s > t : \underline{X}_s = X_s\}, \\ G(\omega) &= \{g_s(\omega) : s \in \mathbb{R}_+, d_s(\omega) \neq g_s(\omega)\}, \end{aligned}$$

ainsi que la transformation θ' définie par,

$$\theta'_t(\omega) = \theta_t(\omega) - \omega_{t-}.$$

Avec ces notations, la décomposition en son minimum du processus canonique X sera représentée par le couple de variables aléatoires $(X \circ k_{g\zeta}, X \circ \theta'_{g\zeta})$ défini sur Ω.

On rappelle que $\mathbb{P}^{\uparrow, t}$ désigne la loi sous $\mathbb{P}^\uparrow$ du processus canonique X tué au temps t et l'on notera V la durée de vie de l'excursion générique.

THÉORÈME 4 *Sous la mesure* $\int_0^\infty dt\ \mathbb{P}^t$ *le couple* $(X \circ k_{g\zeta}, X \circ \theta'_{g\zeta})$ *a pour loi,*

$$\int_0^\infty dx \mathbb{P}^{(-x,\infty)} \otimes \int_0^\infty dt \underline{n}^t(\cdot, t < V).$$

De plus,

$$\int_0^\infty dt \underline{n}^t(\cdot, t < V) = \int_0^\infty dt \mathbb{P}^{\uparrow, t}\left(\frac{\cdot}{\bar{X}_t}\right).$$

Preuve Soient F un processus prévisible, positif et H une fonctionnelle mesurable, positive alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^\infty F_{g_t} H \circ k_{t-g_t} \circ \theta'_{g_t} dt\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{s \in G(\omega)} F_s(\omega) \int_s^{d_s(\omega)} H \circ k_{t-s} \circ \theta'_s(\omega) dt\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{s \in G(\omega)} F_s(\{(\omega - \underline{\omega})_u + \underline{\omega}_u, u \geqslant 0\}) \int_s^{d_s(\omega)} H \circ k_{t-s} \circ \theta'_s(\omega) dt\right). \end{aligned}$$

$-\underline{X}$ est le temps local en 0 de $X - \underline{X}$. F est donc un processus prévisible pour la filtration engendrée par $X - \underline{X}$ et l'expression précédente vaut en vertu de la formule de Maisonneuve,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty F_s(\omega) d(-\underline{X}_s)\right) \underline{n}\left(\int_0^{V(\omega)} H \circ k_t(\omega) dt\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty F_{\tau_{-y}} dy\right) \underline{n}\left(\int_0^V H \circ k_t dt\right),$$

d'où la loi de $(X \circ k_{g\zeta}, X \circ \theta'_{g\zeta})$ sous la mesure $\int_0^\infty dt\ \mathbb{P}^t$.

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

D'après cette dernière relation, pour tout $x > 0$ et $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty 1_{\{X_{g_t} \geq -x\}} e^{-\lambda(t-g_t)} H \circ k_{t-g_t} \circ \theta'_{g_t} dt\right) = \int_0^\infty 1_{\{y \leq x\}} dy \underline{n}\left(\int_0^V e^{-\lambda t} H \circ k_t dt\right)$$

alors,

$$\underline{n}\left(\int_0^V e^{-\lambda t} H \circ k_t dt\right) = \frac{1}{x} \mathbb{E}_x^{(0,\infty)}\left(\int_0^\infty dt e^{-\lambda(t-g_t)} H \circ k_{t-g_t} \circ \theta'_{g_t}\right)$$
$$= \mathbb{E}_x^\uparrow\left(\int_0^\infty dt e^{-\lambda(t-g_t)} \frac{1}{X_t} H \circ k_{t-g_t} \circ \theta'_{g_t}\right).$$

Enfin, on déduit du théorème de convergence 3 que

$$\underline{n}\left(\int_0^V e^{-\lambda t} H \circ k_t dt\right) = \mathbb{E}^\uparrow\left(\int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \frac{H \circ k_t}{X_t}\right). \qquad \blacksquare$$

On peut considérer abusivement que les lois $\int_0^\infty dx \mathbb{P}^{(-x,\infty)}$ et $\int_0^\infty dt \mathbb{P}^{\uparrow,t}(\frac{\cdot}{X_t})$ décrivent le processus canonique X sous $\int_0^\infty dt \mathbb{P}^t$ respectivement avant et après son minimum. Toutefois il ne s'agit pas des lois des processus pré-minimum et post-minimum, celles-ci étant en réalité des mesures qui ne sont pas σ-finies. Pour rendre la description du théorème 5 plus claire, nous allons exprimer la mesure $\int_0^\infty dt \mathbb{P}^{\uparrow,t}(\frac{\cdot}{X_t})$ en fonction de la loi de sortie du processus tout comme pour $\int_0^\infty dx \mathbb{P}^{(-x,\infty)}$. Nous verrons au lemme 2 qu'il s'agit de $(X, \mathbb{P}^\uparrow)$ tué au dernier temps d'atteinte d'une variable aléatoire indépendante et distribuée suivant la mesure $dW(x)$.

Commençons par définir la loi de $(X, \mathbb{P}^\uparrow)$ conditionné à atteindre un état $x > 0$ et tué au dernier temps où il l'atteint. Une manière rigoureuse de le faire est d'établir cette loi comme un h-processus associé à $(X, \mathbb{P}_x^\uparrow)_{x>0}$.

LEMME 1 *Pour tout* $x > 0$, *sous la loi conditionnelle* $\mathbb{P}^\uparrow(\cdot \mid \tau_x < \infty)$, *le processus canonique* X *tué au dernier temps où il atteint* x *(i.e.* $X \circ k_{\sigma_x}$*) est fortement markovien avec pour semi-groupe de transition,*

$$Q_t(y, dz) = \frac{g(z, x)}{g(y, x)} p_t^\uparrow(y, dz), \quad y > 0, \ z > 0$$

et pour état initial 0. *Nous noterons* $\mathbb{P}^{\uparrow,\sigma_x}$ *la loi de ce processus.*

Rappelons que la fonction g a été définie par $g(z, x) = \mathbb{P}_z^\uparrow(\tau_x < \infty)$ et a été calculée en proposition 2.

Preuve Elle repose presque entièrement sur les travaux de Meyer, Smythe et Walsh [17]. Pour tout $x > 0, \sigma_x$ est un temps cooptionnel et $\{X_t, t < \sigma_x\}$ est un processus markovien sous $\mathbb{P}^\uparrow$ qui a d'après ([17], théorème 2.1) pour semi-groupe de transition,

$$Q_t(y, dz) = \frac{g(z, x)}{g(y, x)} p_t^\uparrow(y, dz), \quad y > 0, \ z > 0$$

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

(car $g(z,x) = \mathbb{P}_z^\uparrow(\tau_x < \infty) = \mathbb{P}_z^\uparrow(\sigma_x > 0)$ est la fonction excessive associée au temps σ_x) et pour loi initiale,

$$\frac{zW_d'(z)}{W(z)}\varepsilon_0(dz) + \left(1 - \frac{zW_d'(z)}{W(z)}\right)\varepsilon_\delta(dz).$$

Ici, W_d' désigne la dérivée à droite de W et la quantité $zW_d'(z)/W(z)$ correspond au calcul de $\mathbb{P}^\uparrow(\tau_z < \infty)$.

Le fait de remplacer la loi $\mathbb{P}^\uparrow$ par la loi $\mathbb{P}^\uparrow(\cdot|\tau_x < \infty) = \mathbb{P}^\uparrow(\cdot|\sigma_x > 0)$ dans le calcul effectué en ([17], théorème 2.1) ne change rien au semi-groupe de transition du processus $X \circ k_{\sigma_x}$ mais on vérifie facilement que sa loi initiale devient $\varepsilon_0(dz)$. ■

LEMME 2 *Sur $(\Omega, \mathscr{F})$, la mesure $\int_0^\infty dt\,\mathbb{P}^{\uparrow,t}(\frac{\cdot}{X_t})$ prend la forme suivante,*

$$\int_0^\infty dt\,\mathbb{P}^{\uparrow,t}\left(\frac{\cdot}{X_t}\right) = \int_0^\infty dW(x)\mathbb{P}^{\uparrow,\sigma_x}.$$

Preuve Il suffit de montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $\Lambda_t \in \mathscr{F}_t$ et h continue à support compact,

$$\int_0^\infty dW(x)h(x)\mathbb{P}^{\uparrow,\sigma_x}(\Lambda_t) = \mathbb{E}^\uparrow\left(\int_0^\infty \Lambda_t \circ k_s \frac{h(X_s)}{X_s}ds\right).$$

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n, n$ fonctions positives, mesurables et bornées telles que $f_i(\delta) = 0$ pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n = t$ alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\uparrow&\left(\int_0^\infty (f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\cdots f_n(X_{t_n}))\circ k_s \frac{h(X_s)}{X_s}ds\right)\\ &= \mathbb{E}^\uparrow\left(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\cdots f_n(X_{t_n})\int_t^\infty \frac{h(X_s)}{X_s}ds\right).\end{aligned}$$

Par application de la propriété de Markov, ceci vaut,

$$\mathbb{E}^\uparrow\left(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\cdots f_n(X_{t_n})\mathbb{E}_{X_t}^\uparrow\left(\int_0^\infty \frac{h(X_s)}{X_s}ds\right)\right)$$

ou encore, d'après la proposition 2,

$$\mathbb{E}^\uparrow\left(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\cdots f_n(X_{t_n})\int_0^\infty W(x)dx\frac{h(x)}{x}\mathbb{P}_{X_t}^\uparrow(\tau_x < \infty)\right).$$

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

Enfin, compte tenu de l'égalité $\{t < \sigma_x\} = \{\tau_x \circ \theta_t < \infty\}$ on obtient,

$$\int_0^\infty h(x) \frac{\mathbb{P}^\uparrow(\tau_x < \infty) W(x)}{x} dx \mathbb{E}^\uparrow(f_1(X_{t_1}) f_2(X_{t_2}) \cdots f_n(X_{t_n}), \, t < \sigma_x | \tau_x < \infty)$$

$$= \int_0^\infty h(x) dW(x) \mathbb{E}^{\uparrow, \sigma_x}(f_1(X_{t_1}) f_2(X_{t_2}) \cdots f_n(X_{t_n})),$$

car $\mathbb{P}^\uparrow(\tau_x < \infty) = x W'_d(x)/W(x)$. ■

Remarques 1_ On déduit d'un résultat de Getoor ([11], théorème 8.1) que la mesure μ déterminée par,

$$\int_0^\infty dt \underline{n}(f(X_t), t < V) = \mu(f)$$

est invariante pour le processus réfléchi $X - \underline{X}$. Le théorème 4 et le lemme 2 montrent que celle-ci n'est autre que la mesure $dW(x)$ et son invariance pour le processus réfléchi est mise en évidence par le théorème 1, 3_.

2_ Du lemme 1 et du théorème 4, on déduit maintenant la loi du couple $(X \circ k_{g\zeta}, X \circ \theta'_{g\zeta})$ sous la forme,

$$\int_0^\infty dx \mathbb{P}^{(-x, \infty)} \otimes \int_0^\infty dW(y) \mathbb{P}^{\uparrow, \sigma_y},$$

ce qui avait déjà été calculé dans le cas brownien par Bismut ([6], théorème 2.16). Voici un autre prolongement d'un résultat de Bismut ([6], théorème 1.2), il donne la loi du processus d'excursion décomposé en un temps distribué suivant la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, V(\omega)]$.

THÉORÈME 5 *Sous la mesure* $1_{\{0 \leq t \leq V(\omega)\}} dt \underline{n}(d\omega)$ *les processus* $(t, \omega) \to \omega \circ k_t$ *et* $(t, \omega) \to \omega \circ \theta_t$ *définis sur* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *sont indépendants conditionnellement à* ω_t *et le triplet* $(\omega \circ k_t, \omega_t, \omega \circ \theta_t)$ *a pour loi* $d\mathbb{P}^{\uparrow, \sigma_x} \otimes dW(x) \otimes d\mathbb{P}_x^{(0, \infty)}$ *sur* $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Lorsqu'il a étudié le cas du mouvement brownien, Bismut a tenu compte en plus d'une relation entre mouvement brownien et processus de Bessel de dimension 3 au moyen du retournement du temps, ce qui n'est pas vérifié dans notre cas. Plus précisément, il obtient que la loi du triplet $(\omega \circ k_t, \omega_t, \check{\omega} \circ k_t)$ est $d\,\mathbb{P}^{\uparrow, \sigma_x} \otimes dW(x) \otimes d\mathbb{P}^{\uparrow, \sigma_x}$, où $\check{\omega}$ désigne la trajectoire ω retournée en son temps de vie. Ainsi, la loi des excursions du processus réfléchi n'est plus exprimée qu'en fonction de celle du processus de Bessel.

Preuve Soient H et H' deux fonctionnelles positives, mesurables sur Ω et f une fonction positive, mesurable définie sur $\mathbb{R}$. Par la propriété de Markov de la mesure d'excursion on a,

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} dt \underline{n}(d\omega) 1_{\{0 \leq t \leq V(\omega)\}} H \circ k_t(\omega) f(\omega_t) H' \circ \theta_t(\omega)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} dt \underline{n}(d\omega) 1_{\{0 \leq t \leq V(\omega)\}} H \circ k_t(\omega) f(\omega_t) \mathbb{E}_{\omega_t}^{(0, \infty)}(H').$$

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

Par le lemme 1 et le théorème 5 ceci est égal à,

$$\mathbb{E}^{\uparrow}\left(\int_0^\infty H\circ k_t f(X_t)\mathbb{E}_{X_t}^{(0,\infty)}(H')\frac{dt}{X_t}\right)=\int_0^\infty dW(x)\mathbb{E}^{\uparrow,\sigma_x}(H)f(x)\mathbb{E}_x^{(0,\infty)}(H'). \qquad \blacksquare$$

Notons pour terminer une description de la mesure $\underline{n}^t 1_{\{t<V\}}$ du processus d'excursion tué en un temps $t<V$ sous $\underline{n}$. En reprenant la preuve du théorème 5, on montre que $\underline{n}^t$ est une mesure finie sur $\{t<V\}$ et vaut pour tout $t>0$,

$$\underline{n}^t(\cdot, t<V)=\mathbb{P}^{\uparrow,t}\left(\frac{\cdot}{X_t}\right).$$

En particulier, on a,

$$\underline{n}^t(t<V)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathbb{P}_x}{x}(t<\tau_0)=\varphi(t)$$

où φ est une fonction positive définie sur $\mathbb{R}_+$ dont la transformée de Laplace est donnée pour tout $\alpha>0$ par,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\varphi(t)dt=\underline{n}\left(\frac{1-e^{-\alpha V}}{\alpha}\right).$$

Rappelons que $t\to\tau_{-t}$ est l'inverse du temps local en 0 du processus $X-\underline{X}$. Le second membre se calcule alors par la formule exponentielle de la théorie des excursions (Ito [14]) et d'après (4),

$$\begin{aligned}\exp(t\underline{n}(e^{-\alpha V}-1)) &= \mathbb{E}(\exp(-\alpha\tau_{-t})), \quad t>0\\ &= \exp(-t\Phi(\alpha)).\end{aligned}$$

Soit enfin,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\varphi(t)dt=\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha}.$$

COROLLAIRE 3 *Pour tout $t>0$, et toute fonctionnelle H $\mathscr{F}_t$-mesurable définie sur Ω,*

$$\underline{n}^t(H\,|\,t<V)=\lim_{x\to 0}\mathbb{E}_x^t(H\,|\,t<\tau_0)=\frac{1}{\varphi(t)}\mathbb{E}^{\uparrow,t}\left(\frac{H}{X_t}\right).$$

Remarque Lorsqu'il s'agit du mouvement brownien, la mesure $\underline{n}^t(\cdot\,|\,t<V)$ correspond à la loi du méandre brownien entre 0 et t. Ce résultat s'apparente alors à celui d'Imhof [13] reliant la loi du méandre brownien à celle du processus de Bessel de dimension 3 et issu de 0.

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014

References

[1] J. Bertoin, Sur la décomposition de la trajectoire d'un processus de Lévy spectralement positif en son infimum, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **27-4** (1991), 537–547.
[2] J. Bertoin, An Extension of Pitman's Theorem for Spectrally Positive Lévy Processes, *Ann. Probab.* **20-3** (1992).
[3] J. Bertoin, Factorizing Laplace exponents in a spectrally positive L évy process. *Stoch. Proc. Appl.* (1992) 307–313.
[4] J. Bertoin, Splitting at the infimum and excursions in half-lines for random walks and Lévy processes. *Stoch. Proc. Appl.* (à paraître).
[5] N. Bingham, Fluctuation Theory in Continuous Time, *Adv. Appl. Prob.* **7** (1975), 705–766.
[6] J. M. Bismut, Last Exit Decomposition and Regularity at the Boundary of Transition Probabilities, *Zeitschrift für Wahr.* **69** (1985), 65–98.
[7] C. Dellacherie, P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris, Volume **4** (1987).
[8] R. A. Doney, Hitting Probabilities for Spectrally Positive Lévy Processes, *J. London Math. Soc.* (2) **44** (1991), 566–576.
[9] J. L. Doob, Conditional Brownian Motion and the Boundary Limits of Harmonic Functions, Bull. Sc. *Math., France* **85** (1957), 431–58.
[10] D. J. Emery, Exit Problem for a Spectrally Positive Lévy Processs, *Adv. Appl. Prob.* **5** (1973), 498–520.
[11] R. K. Getoor, Excursions of a Markov Process, *Ann. Probab.* **7** (1979), 244–266.
[12] P. Greenwood, J. W. Pitman, Fluctuation Identities for Lévy Processes and Splitting at the Maximum, *Adv. Appl. Prob.* **12** (1980), 893–902.
[13] J. P. Imhof, Density Factorizations for Brownian Motion, Meander and the Three-dimensional Bessel Processs, and Applications *J. Appl. Prob.* **3** (1984), 500–510.
[14] K. Ito, *Poisson Point Processes Attached to Markov Processes*, 6th Berkeley *Symp. on Math. Stat. Prob.* (1970), 225–239.
[15] K. Ito, H. P. McKean, *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Grundlehren der Math. Wissenschaften Band 125. Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1974).
[16] H. P. McKean, *Excursions of a non-singular diffusion*, Z. Warhscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete **(1)** (1963) 230–39.
[17] P. A. Meyer, R. T. Smythe, J. B. Walsh, *Birth and Death of Markov Processes*, Proceedings of the 6th Berkeley symposium, (1970).
[18] P. W. Millar, Exit Properties of Stochastic Processes with Stationary Independent Increments, *Trans. Amer. Math. Soc.* **178** (1973), 459–479.
[19] L. C. G. Rogers, A new Identity for Real Lévy Processes, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **20-1** (1984), 21–34.
[20] L. C.G. Rogers, The two-sided exit problem for spectrally positive Lévy processes. *Adv. App. Prob.* (1989) 486–487.
[21] B. A. Rogozin, On the Distribution of Functionals Related to Boundary Problems for Processes with Independent Increments, *Theory Prob. Appl.* **11** (1966), 580–591.
[22] M. L. Silverstein, Classification of Coharmonic and Coinvariant functions for a Lévy process, *Ann. Probab.* **8** (1980), 539–575.
[23] L. Takacs,. *Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes*, Wiley, New York, (1967).
[24] D. Williams, Path Decomposition and Continuity of Local time for One Dimentional Diffusions, *Proc. London Math. Soc.* **28** (1974), 738–768.

Downloaded by [UQ Library] at 22:49 02 November 2014