Excursion normalisée, méandre et pont pour les processus de Lévy stables.

L. Chaumont

Laboratoire de Probabilités, Tour 56,

Université Pierre et Marie Curie,

4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.

Abstract : Les définitions de l'excursion normalisée et du méandre sont tout d'abord étendues à tous les processus stables. Ces processus sont ensuite reliés au processus de Lévy initial conditionné à rester positif. Des contructions trajectorielles et des relations d'absolue continuité sont montrées entre le méandre et le processus conditionné à rester positif sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. On introduit ensuite la loi du processus de Lévy conditionné à rester positif et à revenir en 0 au temps 1. On montre alors que cette loi est celle d'un processus obtenu en intervertissant les parties pré et post-minimum du pont d'un processus de Lévy de longueur 1.

Key words : Processus de Lévy, excursion normalisée, pont, méandre, conditionnement à rester positif.

A.M.S. Classification : 60 J 30.

1 Introduction.

La propriété de "scaling" (invariance par changement d'échelle des temps) du mouvement brownien permet de construire des processus à durée de vie déterministe dont la loi sur n'importe quel intervalle de temps se déduit de la loi sur un intervalle donné en changeant simplement l'échelle des temps. C'est le cas par exemple de l'excursion normalisée, du méandre ou du pont et de certains autres processus obtenus à partir de la trajectoire brownienne. Ces processus ont été étudiés par un grand nombre d'auteurs parmi lesquels on peut citer Chung [16], Imhof [21], Vervaat [30], Biane et Yor [8] et [9], Bertoin et Pitman [5], . . .

Nous verrons que rien n'empêche de construire de tels processus relativement à des p.a.i.s. qui possèdent la propriété de scaling (ce que l'on appelle plus simplement des processus stables). Dans ce cas, l'excursion normalisée et le pont avaient déjà été construits comme la limite de marches aléatoires qui appartiennent au domaine d'attraction d'une loi stable. Ceci est dû en particulier aux travaux de Doney [17], Bingham [10], Liggett [24] et Belkin [1].

Nous donnerons, dans la troisième partie, quelques constructions simples de l'excursion normalisée et du méandre. Leur loi et leur trajectoire seront ensuite reliées à celles du processus stable initial conditionné à rester positif. Celui-ci a l'avantage d'être un processus markovien homogène par rapport auquel on peut construire l'excursion normalisée et le méandre et de faciliter ainsi l'étude de ces processus. Nous retrouverons, par exemple, la relation d'absolue continuité entre la loi du méandre et celle du processus conditionné à rester positif sur $[0, 1]$ établie par Imhof dans le cas brownien.

Dans la quatrième partie, nous établirons l'analogue de la transformation de Vervaat qui consiste, dans le cas brownien, à obtenir la trajectoire de l'excursion normalisée en intervertissant les parties pré-minimum et post-minimum du pont. Nous verrons que dans le cas général, cette relation a encore lieu si l'on remplace l'excursion normalisée par le processus conditionné à rester positif et à revenir en 0 au temps 1. Ces derniers sont égaux en loi en l'absence de saut négatif et, en particulier, dans le cas brownien.

La majeure partie des résultats de cet article a été annoncée dans la note [15].

2 Préliminaires.

L'espace de Skohorod des trajectoires càdlàg à valeurs réelles sera noté $\mathcal{D}([0, \infty))$. Il sera muni de sa tribu borélienne $\mathcal{F}$ et de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$. La durée de vie d'une trajectoire $\omega \in \mathcal{D}([0, \infty))$ sera notée $\zeta(\omega)$. L'étude des processus à durée de vie déterministe, nécessite d'introduire le sous espace de $\mathcal{D}([0,\infty))$ suivant :

$$\mathcal{D}([0,t]) := \{\omega \in \mathcal{D}([0,\infty))\ :\ \zeta(\omega) = t\}\,,\quad t > 0\,.$$

On note X le processus des coordonnées, θ l'opérateur shift usuel et k l'opérateur de meurtre défini par :

$$\begin{cases} X_s(k_t(\omega)) = X_s(\omega) & \text{si} \quad s < t \\ X_s(k_t(\omega)) = \delta & \text{si} \quad s \geq t\,. \end{cases}$$

$(X,\mathbb{P})$ désignera un processus stable d'indice $\alpha \in (0,2]$: i.e. sous $\mathbb{P}$, les accroissements du processus canonique X sont indépendants et stationnaires et il satisfait la propriété de scaling (changement d'échelle des temps):

$$X \stackrel{(d)}{=} \{t^{-1/\alpha} X_{ts}\,,\ s \geq 0\}\,,\quad \text{pour tout}\ \ t > 0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_x$ sera la loi du processus canonique sous $\mathbb{P}$ issu de x, c'est à dire : $(X,\mathbb{P}_x) := (X+x,\mathbb{P})$. Nous notons $(p_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de transition du processus $(X,\mathbb{P})$. La propriété de scaling est alors équivalente à

$$p_t(x) = t^{1/\alpha} p_1(t^{1/\alpha} x)\,.$$

Si $\alpha \neq 1$ alors l'exposant caractéristique de $(X,\mathbb{P})$ est donné par la formule

$$\mathbb{E}(\exp(isX_1)) = \exp(-c|s|^\alpha(1 - i\beta\,\mathrm{sgn}(s)\tan(\pi\alpha/2)))$$

où β est un paramètre compris entre -1 et 1, et c est une constante positive. Nous écartons les subordinateurs de notre étude, ce qui est équivalent à supposer $-1 < \beta < 1$ lorsque $\alpha < 1$. La loi d'un processus stable est donc entièrement déterminée, à une constante multiplicative près, par deux coefficients: α qui est l'indice de changement d'échelle du processus et β son coefficient d'asymétrie. Toutefois, nous caractériserons l'asymétrie du processus $(X,\mathbb{P})$ par la probabilité

$$\rho := \mathbb{P}(X_1 \geq 0)$$

qui a été exprimée par Zolotarev [31] en fonction de α et β:

$$\rho = \frac{1}{2} + (\pi\alpha)^{-1}\arctan(\beta\tan(\pi\alpha/2))\,.$$

Rappelons que si $0 < \alpha \leq 1$, alors les points sont polaires pour le processus $(X, \mathbb{P})$, (Kesten [22]) alors que si $1 < \alpha \leq 2$, on a $\mathbb{P}(\tau_x < \infty) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Enfin, la construction de l'excursion normalisée et du méandre que nous allons donner à la section suivante repose sur la mesure des excursions en dehors de 0 du processus $X - \underline{X}$ qui est fortement markovien (voir par exemple Bingham [11]). Comme 0 est toujours régulier pour $(-\infty, 0)$ pour un processus stable, on déduit que 0 est régulier pour lui-même pour le processus $X - \underline{X}$. $\underline{L}$ désignera le temps local en 0 de ce processus normalisé à la manière de Silverstein [29], théorème 8 et $\underline{n}$ la mesure des ses excursions en dehors de 0. Rappelons l'expression de la loi du temps de vie des excursions sous $\underline{n}$ qui a été calculée par Monrad et Silverstein [28], lemme 3.2 :

$$\underline{n}(t < \zeta) = \Gamma(\rho)^{-1} t^{\rho - 1} \, . \tag{1}$$

Désignons aussi par $\mathbb{P}_x^{(0,\infty)}$ la loi du processus $(X, \mathbb{P}_x)$, $x > 0$ tué lorsqu'il quitte la demi-droite positive, c'est à dire au temps $\tau_{(-\infty,0)} = \inf\{t \geq 0 \, : \, X_t \leq 0\}$ et notons $(q_t)_{t \geq 0}$ son semi-groupe.

$$\mathbb{P}_x^{(0,\infty)}(\Lambda, t < \zeta) := \mathbb{P}_x(\Lambda, t < \tau_{(-\infty,0)}) \, , \quad t \geq 0 \, , \quad \Lambda \in \mathcal{F}_t \, .$$

La mesure $\underline{n}$ est markovienne et a pour semi-groupe $(q_t)_{t \geq 0}$. Autrement dit, pour toute fonctionnelle mesurable F:

$$\underline{n}(1_\Lambda F \circ \theta_t 1_{\{t < \zeta\}}) = \underline{n}(1_\Lambda \mathbb{E}_{X_t}^{(0,\infty)}(F) 1_{\{t < \zeta\}}) \, , \quad t \geq 0 \, , \quad \Lambda \in \mathcal{F}_t \, .$$

3 Excursion normalisée et méandre.

Pour plus de clarté dans les définitions qui vont suivre nous introduisons sur $\mathcal{D}([0, \infty))$ les fonctionnelles suivantes :

$$S_t(\omega)_s := t^{-1/\alpha} \omega_{ts} \, , \quad t > 0 \, , \quad \omega \in \mathcal{D}([0, \infty)) \, ,$$

$$\text{si } \zeta(\omega) < \infty \text{ et } u > 0 \, , \quad N_u(\omega) = S_{\zeta(\omega)/u}(\omega) \, .$$

Ainsi la transformation N_u consiste à faire un changement d'échelle des temps tel que si ω est une trajectoire de durée de vie $\zeta(\omega) < +\infty$ alors $N_u(\omega)$ est une trajectoire de durée de vie égale à u. Remarquons aussi que :

$$N_u \circ S_t = N_u \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } N_1 \circ k_u = k_1 \circ S_u \text{ sur } \{u < \zeta < \infty\} \, . \tag{2}$$

Lorsque $(X, \mathbb{P})$ désigne un processus de Lévy quelconque, nous avons déjà remarqué que l'identité en loi entre $|X|$, $X - \underline{X}$ et $\overline{X} - X$ n'était plus satisfaite comme dans le cas brownien où la notion de processus réfléchi désigne indifféremment l'un de ces trois processus. Nous verrons que dans le cas général ce sont l'excursion normalisée et le méandre définis à partir des processus $X - \underline{X}$ ou $\overline{X} - X$ qui sont les plus appropriés aux transformations trajectorielles. De plus, le processus $|X|$ n'est pas markovien dès que $(X, \mathbb{P})$ est asymétrique. Pour ces raisons, nous travaillerons avec le processus réfléchi en son minimum (i.e. $X - \underline{X}$) plutôt qu'avec $|X|$, le choix de $X - \underline{X}$ par rapport à celui de $\overline{X} - X$ étant arbitraire.

Il découle de 2 et de la propriété de scaling que pour toute fonctionnelle H, mesurable et bornée :

$$\underline{n}(H \circ N_u \,|\, t < \zeta) = \underline{n}(H \circ N_u \,|\, 1 < \zeta) \ .$$

Cette dernière relation montre que la mesure sur $\mathcal{D}([0, u])$, $u > 0$ définie par

$$\mathbb{P}^{(e,u)}(\cdot) := \underline{n}(\cdot \circ N_u \,|\, t < \zeta) \,, \quad t > 0$$

ne dépend pas de t et par conséquent du temps de vie des excursions.

Nous nous intéresserons plus particuliérement au cas où $u = 1$ et nous noterons pour simplifier $\mathbb{P}^{(e)}$ la mesure $\mathbb{P}^{(e,1)}$.

Nous appellerons loi des excursions normalisées du processus réfléchi $X - \underline{X}$ la mesure de probabilité $\mathbb{P}^{(e)}$ sur $\mathcal{D}([0, 1])$ définie par

$$\mathbb{P}^{(e)}(\cdot) := \frac{\underline{n}(\cdot \circ N_1,\, t < \zeta)}{\underline{n}(t < \zeta)} \,, \quad t > 0 \ .$$

Le fait que cette définition ne dépende pas de t montre que $\mathbb{P}^{(e)}$ est une version de la loi du processus des excursions conditionnées par leur longueur au sens suivant :

$$\underline{n}(\cdot) =\in_0^{\infty} \mathbb{P}^{(e,u)}(\cdot)\, \underline{n}(\zeta \in du) \,.$$

Une fois renormalisée, l'excursion est indépendante de sa longueur initiale. C'est ce que nous allons utiliser à la proposition suivante en construisant à partir du processus $(X, \mathbb{P})$ la trajectoire d'un processus de loi $\mathbb{P}^{(e)}$.

Notons respectivement $\underline{g}_t$ et $\underline{d}_t$ le dernier zéro avant t et le premier zéro après t du processus réfléchi, i.e.

$$\begin{aligned} \underline{g}_t &:= \sup \{s \le t \,:\, X_s = \underline{X}_s\} \\ \underline{d}_t &:= \inf \{s \ge t \,:\, X_s = \underline{X}_s\} \,. \end{aligned}$$

La première assertion est vraie de façon très générale et se trouve de façon implicite dans [20].

Proposition 1 *Sous* $\mathbb{P}$, *conditionnellement à* $\underline{d}_1 - \underline{g}_1 = u$, *le processus* $\{(X-\underline{X})_{\underline{g}_1+s},\, 0 \le s \le \underline{d}_1 - \underline{g}_1\}$ *a pour loi* $\mathbb{P}^{(e,u)}$.

La propriété de scaling entraîne que le processus

$$\left\{\frac{1}{(\underline{d}_1-\underline{g}_1)^{1/\alpha}}(X-\underline{X})_{\underline{g}_1+(\underline{d}_1-\underline{g}_1)s},\, 0 \le s \le 1\right\} \,.$$

a pour loi $\mathbb{P}^{(e)}$. *Celui-ci est alors indépendant de* $\underline{d}_1 - \underline{g}_1$.

Preuve. Soit H une fonctionnelle mesurable et bornée et θ' l'opérateur défini par $\theta'_t(\omega) := \theta_t(\omega) - \omega_t$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H \circ k_{\underline{d}_t-\underline{g}_t} \circ \theta'_{\underline{g}_t}) &= \mathbb{E}(H(\{(X-\underline{X})_{\underline{g}_t+s},\, 0 \le s \le \underline{d}_t - \underline{g}_t\})) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{s \in \underline{G}} H(e_s(\omega)) 1_{\{s<t<\zeta(e_s(\omega))+s\}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \underline{n}(H \,,\, \zeta > t-u)\, d\underline{L}_u\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{t-u}^\infty \underline{n}(H \,|\, \zeta = s)\, \underline{n}(\zeta \in ds)\, d\underline{L}_u\right) \\ &= \int_0^\infty \underline{n}(H \,|\, \zeta = s) \mathbb{E}(\underline{L}_t - 1_{\{s \le t\}} \underline{L}_{t-s})\, \underline{n}(\zeta \in ds) \,. \end{aligned}$$

On montre par le même calcul que

$$\mathbb{P}(\underline{d}_t - \underline{g}_t \in ds) = \mathbb{E}(\underline{L}_t - 1_{\{s \le t\}} \underline{L}_{t-s})\, \underline{n}(\zeta \in ds) \,.$$

Aprés avoir remarqué que

$$\left\{\frac{1}{(\underline{d}_t-\underline{g}_t)^{1/\alpha}}(X-\underline{X})_{\underline{g}_t+(\underline{d}_t-\underline{g}_t)s},\, 0 \le s \le 1\right\} = N_1(\{(X-\underline{X})_{\underline{g}_t+s},\, 0 \le s \le \underline{d}_t - \underline{g}_t\}) \,,$$

le résultat s'obtient simplement en écrivant

$$\mathbb{E}(H\circ N_1(\{(X-\underline{X})_{\underline{g}_t+s},\,0\le s\le \underline{d}_t-\underline{g}_t\}))=$$
$$\int_0^\infty \underline{n}(H\circ N_1\,|\,\zeta=s)\,\mathbb{P}(\underline{d}_t-\underline{g}_t\in ds)=\underline{n}(H\circ N_1\,|\,\zeta=1)\,,$$

où la dernière égalité vient de ce que $\underline{n}(H\circ N_1\,|\,\zeta=s)=\underline{n}(H\circ N_1\,|\,\zeta=1)$. □

Il a été montré par Getoor, [20] (voir aussi Chung, [16]) que sous certaines hypothèses auxquelles satisfait $(X,\mathbb{P})$, la loi du processus $\{(X-\underline{X})_{\underline{g}_t+s},\,0\le s\le \underline{d}_t-\underline{g}_t\}$ sachant $t-\underline{g}_t=u$ correspond à celle de la première excursion de longueur supérieure à $u>0$. Celle-ci est donnée pour toute fonctionnelle mesurable et bornée H par

$$\mathbb{E}(H(\{(X-\underline{X})_{\underline{g}_t+s},\,0\le s\le \underline{d}_t-\underline{g}_t\})\,|\,t-\underline{g}_t=u)=\underline{n}(H\,|\,\zeta>u)\,. \tag{3}$$

Remarquons que cette loi ne dépend pas de t. Dans le cas brownien, la loi de ce processus arrêté en u s'appelle *"loi du méandre de longueur u"*. Celle-ci possède la même propriété de scaling que l'excursion normalisée et est absolument continue par rapport à la loi du processus de Bessel de dimension 3. Le méandre brownien intervient aussi dans de nombreuses transformations trajectorielles entre le pont et l'excursion normalisée. On pourra consulter l'article de Bertoin et Pitman, [5] et celui de Biane et Yor, [9] pour avoir un aperçu des principaux résultats de ce type. Dans le cas stable quelconque, le processus que nous allons définir a aussi d'importantes applications, (voir [26]).

Nous appellerons loi du méandre de longueur 1 *la loi sous* $\mathbb{P}$ *du processus* $\{(X-\underline{X})_{\underline{g}_t+s},\,0\le s\le t-\underline{g}_t\}$ *sachant* $t-\underline{g}_t=1$ *où* $t>1$. *Cette mesure de probabilité sur* $\mathcal{D}([0,1])$ *est donnée par*

$$\mathbb{P}^{(m)}(\cdot):=\underline{n}(\cdot\circ k_1\,|\,1<\zeta)\,. \tag{4}$$

Comme pour l'excursion normalisée, on peut déduire par scaling de $\mathbb{P}^{(m)}$ une loi sur $\mathcal{D}([0,u])$ notée $\mathbb{P}^{(m,u)}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{(m,u)}(\cdot):&=\underline{n}(\cdot\circ k_u\,|\,u<\zeta)\\&=\underline{n}(H\circ k_u\circ S_1\,|\,1<\zeta)\\&=\underline{n}(H\circ N_u\circ k_1\,|\,1<\zeta)\,,\end{aligned}$$

où la troisième égalité vient de 2.

Il découle de cette propriété par un calcul analogue à celui fait en proposition 1 que

Proposition 2 *Sous* $\mathbb{P}$, *le processus*

$$\left\{\frac{1}{(1-\underline{g}_1)^{1/\alpha}}(X-\underline{X})_{\underline{g}_1+(1-\underline{g}_1)s},\ 0\le s\le 1\right\}$$

a pour loi $\mathbb{P}^{(m)}$ *et est indépendant de* $1-\underline{g}_1$.

L'excursion normalisée, le méandre, ainsi que le pont que nous introduirons ultérieurement, sont des processus markoviens inhomogènes dans le temps. Il est donc difficile d'étudier directement leurs lois et leurs trajectoires. Nous allons alors représenter ces processus relativement à un processus markovien homogène construit à partir du processus stable initial et que l'on appelle processus conditionné à rester positif. Celui-ci a été introduit en [2], [3], [4], [12] et [13] et correspond au processus de Bessel de dimension 3 dans le cas du mouvement brownien. Il s'agit d'un h-processus du processus stable tué lorsqu'il sort de la demi-droite positive associé à la fonction invariante :

$$h(x) := \mathbb{E}\left(\int_0^\infty 1_{\{\underline{X}_s\ge -x\}}\,d\underline{L}_s\right) = c_1 x^\gamma\,, \tag{5}$$

où c_1 est une constante qui dépend de la normalisation du temps local $\underline{L}$ et où $\gamma=\alpha(1-\rho)$.

La loi du h-processus associé à cette fonction est donnée par

$$\mathbb{P}_x^\uparrow(\Lambda) := \frac{1}{x^\gamma}\mathbb{E}_x^{(0,\infty)}(X_t^\gamma 1_\Lambda 1_{\{t<\zeta\}})\ ,\ x>0,\ t\ge 0,\ \Lambda\in\mathcal{F}_t\,. \tag{6}$$

$(X,\mathbb{P}_x^\uparrow)_{x>0}$ est une famille fortement markovienne dont le semi-groupe de transition que nous noterons

$$p_t^\uparrow(x,y) := \frac{y^\gamma}{x^\gamma}q_t(x,y)\ ,\ x,y>0,\ t\ge 0\,, \tag{7}$$

est celui d'un processus semi-stable d'indice α d'aprés 1.

Il a été montré en [14], (proposition 1, seconde partie), que la loi de ce processus est la limite quand t tend vers l'infini de la loi du processus stable conditionné à rester positif sur l'intervalle de temps $[0,t]$ au sens suivant :

Pour tout $x>0$, $t\ge 0$ *et* $\Lambda\in\mathcal{F}_t$,

$$\lim_{s\to\infty}\mathbb{P}_x^{(0,\infty)}(\Lambda\,|\,\underline{X}_s\ge 0) = \mathbb{P}_x^\uparrow(\Lambda)\,.$$

Toujours d'après [14], (voir aussi [13], théorème 3), il existe une loi markovienne, que nous noterons $\mathbb{P}^{\uparrow}$, sous laquelle le processus canonique est issu de 0 et a pour semi-groupe $(p_t^{\uparrow})_{t\geq 0}$. Cette loi est la limite au sens de Skorohod, lorsque x tend vers $0+$, de $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$, (voir aussi [13]). On a alors entre $\mathbb{P}^{\uparrow}$ et $\underline{n}$ la relation d'absolue continuité suivante :

$$\mathbb{P}^{\uparrow}(\Lambda) = \underline{n}(h(X_t)1_{\{\Lambda, t<\zeta\}})\,, t \geq 0\,, \quad \Lambda \in \mathcal{F}_t\,. \tag{8}$$

La première partie de ce lemme est due à Bingham, [10]. La démonstration qui en est donnée ici présente l'intérêt d'obtenir l'équivalent de $\mathbb{P}_x(\underline{X}_t \geq 0)$, lorsque $x \to 0+$, sous une forme appropriée.

Lemme 1 *Soit $t > 0$ fixé.*

*1_*

$$\mathbb{P}_x(\underline{X}_t \geq 0) = \mathbb{P}_x(\tau_{(-\infty,0)} > t) \sim \underline{n}(t < \zeta)h(x)\,, \quad (x \to 0+)\,.$$

2_ Pour tout $t > 0$ et toute fonctionnelle continue, bornée, $\mathcal{F}_t$-mesurable H,

$$\lim_{x\to 0} \mathbb{E}_x^{\uparrow}(h(X_t)^{-1}H) = \mathbb{E}^{\uparrow}(h(X_t)^{-1}H)\,.$$

Preuve. 1_ Si $\mathbf{e}$ est une variable exponentielle de paramètre 1 et indépendante de $(X, \mathbb{P})$ alors

$$\mathbb{P}_x(\tau_{(-\infty,0)} > \mathbf{e}/\epsilon) \sim \epsilon^{1-\rho}h(x)\,, \quad (\epsilon \to 0+)\,.$$

En effet, par la formule de sortie de la théorie des excursions:

$$\mathbb{P}_x(\tau_{(-\infty,0)} > \mathbf{e}/\epsilon) = \mathbb{E}(\underline{X}_{\mathbf{e}/\epsilon} \geq -x) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-\epsilon t}1_{\{\underline{X}_t \geq -x\}}\,d\underline{L}_t\right)\underline{n}(1 - e^{-\epsilon\zeta})$$

où $\underline{n}(1 - e^{-\epsilon\zeta}) = \epsilon^{1-\rho}$ d'aprés 1. Il découle alors des théorèmes taubériens que

$$\mathbb{P}_x(\tau_{(-\infty,0)} > s) \sim \Gamma(\rho)^{-1}s^{\rho-1}h(x)\,, \quad (s \to +\infty)\,.$$

Par la propriété de scaling, on obtient alors que

$$\mathbb{P}_x(\underline{X}_t \geq 0) = \mathbb{P}_x(\tau_{(-\infty,0)} > t) \sim \Gamma(\rho)^{-1}t^{\rho-1}h(x) = \underline{n}(t < \zeta)h(x)\,, \quad (x \to 0+)\,.$$

2_ La convergence des lois $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ vers $\mathbb{P}^{\uparrow}$ lorsque x tend vers 0 ne suffit pas car h^{-1} n'est pas une fonction bornée.

Il a été montré en [14], (proposition 2, seconde partie), qu'il existe une suite de processus Z^x qui converge $\mathbb{P}_1^{\uparrow}-p.s.$ (pour la topologie de Skohorod) vers un processus Z tels que sous $\mathbb{P}_1^{\uparrow}$, pour tout $x>0$, Z^x a pour loi $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ et Z a pour loi $\mathbb{P}^{\uparrow}$.

D'autre part, la première partie du lemme entraîne que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\mathbb{E}_1^{\uparrow}(h(Z_t^x)^{-1}) &= \lim_{x\to 0}\mathbb{E}_x^{\uparrow}(h(X_t)^{-1})\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{h(x)}\mathbb{P}_x(\tau_{(-\infty,0)}>t)\\ &= \underline{n}(\zeta>t)=\mathbb{E}^{\uparrow}(h(X_t)^{-1})=\mathbb{E}_1^{\uparrow}(h(Z_t)^{-1})\,.\end{aligned}$$

Puisque $h(Z_t^x)^{-1}$ est une suite de v.a. positives qui converge $\mathbb{P}_1^{\uparrow}-p.s.$ vers $h(Z_t)^{-1}$, celle-ci converge alors dans L_1.

Enfin, on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_1^{\uparrow}(h(Z_t^x)^{-1}H(Z^x)-h(Z_t)^{-1}H(Z))\\ =\ &\mathbb{E}_1^{\uparrow}((h(Z_t^x)^{-1}-h(Z_t)^{-1})(H(Z^x)+H(Z)))+\mathbb{E}_1^{\uparrow}(h(Z_t)^{-1}H(Z^x))-\mathbb{E}_1^{\uparrow}(h(Z_t^x)^{-1}H(Z))\,.\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, $\mathbb{E}_1^{\uparrow}(h(Z_t)^{-1}H(Z^x))$ tend vers $\mathbb{E}_1^{\uparrow}(h(Z_t)^{-1}H(Z))$ lorsque x tend vers 0. Et d'après la convergence de $h(Z_t^x)^{-1}$ vers $h(Z_t)^{-1}$ dans L_1, le terme $\mathbb{E}_1^{\uparrow}((h(Z_t^x)^{-1}-h(Z_t)^{-1})(H(Z^x)+H(Z)))$ tend vers 0 et le terme $\mathbb{E}_1^{\uparrow}(h(Z_t^x)^{-1}H(Z))$ tend vers $\mathbb{E}_1^{\uparrow}(h(Z_t)^{-1}H(Z))$. □

Le théorème suivant est l'analogue de certaines relations de Durret-Iglehart-Miller et d'Imhof [21] qui ont été rappelées dans le cas brownien par Biane et Yor [9], théorèmes 3 et 5. La premiére partie est une relation d'absolue continuité entre $\mathbb{P}^{(m)}$ et la loi du processus $(X,\mathbb{P}^{\uparrow})$ tué au temps 1. Ceci nous permet, en second lieu, de justifier que la loi $\mathbb{P}^{(m)}$ du méandre est celle du processus $(X,\mathbb{P})$ tué au temps 1 et conditionné à rester positif sur l'intervalle de temps $[0,1]$.

Théorème 1 *La loi du méandre sur* $[0,1]$ *admet les deux représentations suivantes :*

1_ Pour toute fonctionnelle bornée et $\mathcal{F}_1$-mesurable F,

$$\mathbb{P}^{(m)}(F)=\mathbb{E}^{\uparrow}(\Gamma(\rho)h(X_1)^{-1}F)\,.$$

2_ Pour toute fonctionnelle continue, bornée et $\mathcal{F}_1$-mesurable H,

$$\mathbb{P}^{(m)}(H)=\lim_{x\to 0}\mathbb{E}_x(H\,|\,\underline{X}_1\geq 0)\,.$$

Preuve. D'aprés la définition 4,

$$\mathbb{P}^{(m)}(H) = \underline{n}(H \,|\, 1 < \zeta)\,,$$

puis par 8 et 1,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(m)}(H) &= \mathbb{E}^{\uparrow}((\underline{n}(1 < \zeta)h(X_1))^{-1}H) \\ &= \mathbb{E}^{\uparrow}(\Gamma(\rho)h(X_1)^{-1}H)\,. \end{aligned}$$

D'autre part, d'aprés 6,

$$\mathbb{E}_x(H \,|\, \underline{X}_1 \geq 0) = \frac{h(x)}{\mathbb{P}_x(\underline{X}_1 \geq 0)} \mathbb{E}_x^{\uparrow}(h(X_1)^{-1}H)\,.$$

La seconde partie est alors une conséquence du lemme précédent. $\square$

La proposition suivante indique d'une part que la loi $\mathbb{P}^{(m)}$ correspond à celle du processus $(X, \mathbb{P}^{\uparrow})$ tué au temps 1 et conditionné à être égal à son minimum futur au temps 1. Plus précisément, la trajectoire du méandre est obtenue en normalisant la trajectoire du processus $(X, \mathbb{P}^{\uparrow})$ tué au dernier temps d'atteinte du minimum futur avant un temps fixé $t > 0$. Pour tout $t \geq 0$, définissons : $\underline{\underline{X}}_t := \inf_{s \geq t} X_s$ et $\underline{\underline{g}}_t := \sup\,\{s \leq t \,:\, X_s = \underline{\underline{X}}_s\}$.

Théorème 2 *Le méandre peut être construit à partir du processus* $(X, \mathbb{P}^{\uparrow})$ *comme suit :*
1_ Pour toute fonctionnelle bornée et $\mathcal{F}_1$*-mesurable* F*,*

$$\mathbb{P}^{(m)}(F) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{E}^{\uparrow}(F \,|\, X_1 - \underline{\underline{X}}_1 \leq \epsilon)\,.$$

2_ Sous $\mathbb{P}^{\uparrow}$*, conditionnellement à* $\underline{\underline{g}}_1 = t$*,* $t \leq 1$*, le processus* $\{X_s\,,\, 0 \leq s \leq \underline{\underline{g}}_1\}$ *suit la loi* $\mathbb{P}^{(m,t)}$ *définie en 4. La propriété de scaling entraîne que cette loi est aussi celle du processus* $\{\underline{\underline{g}}_1^{-1/\alpha} X_{\underline{\underline{g}}_1 s}\,,\, 0 \leq s \leq 1\}$ *sous* $\mathbb{P}^{\uparrow}$ *et que ce dernier est indépendant de* $\underline{\underline{g}}_1$*.*

Preuve. 1_ Soient $F \in b\,\mathcal{F}_1$ et $\epsilon > 0$ alors

$$\mathbb{E}^{\uparrow}(F \,|\, X_1 - \underline{\underline{X}}_1 \leq \epsilon) = \mathbb{E}^{\uparrow}\left(F \frac{1_{\{\underline{\underline{X}}_1/X_1 \in [1-\epsilon/X_1, 1]\}}}{\mathbb{P}^{\uparrow}(\underline{\underline{X}}_1/X_1 \in [1 - \epsilon/X_1, 1])} \right)\,.$$

La variable $\underline{\underline{X}}_1/X_1$ est indépendante de $\mathcal{F}_1$ et sa loi est déterminée par $\mathbb{P}^{\uparrow}((\underline{\underline{X}}_1/X_1) \geq x) = (1-x)^{\gamma} 1_{\{x \leq 1\}}$. En effet, si m désigne le temps d'atteinte du minimum absolu, alors d'après la propriété de Markov appliquée au temps 1,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\uparrow}(F1_{\{\underline{\underline{X}}_1/X_1)\geq x\}}) &= \mathbb{E}^{\uparrow}(F1_{\{X_m\circ\theta_1/X_1)\geq x\}}) \\
&= \mathbb{E}^{\uparrow}(F\mathbb{P}^{\uparrow}_{X_1}(X_m \geq xy)_{|y=X_1})) \\
&= \mathbb{E}^{\uparrow}(F)(1-x)^{\alpha(1-\rho)}1_{\{x\leq 1\}}\,,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de la loi de X_m sous $\mathbb{P}^{\uparrow}_x$, $x>0$ déterminée en [13], théorème 2. En appliquant ceci et la propriété de Markov au temps 1, on obtient

$$\mathbb{E}^{\uparrow}(F\,|\,X_1-\underline{\underline{X}}_1\leq\epsilon) = \mathbb{E}^{\uparrow}\left(F\frac{(\epsilon/X_1)^{\gamma}1_{\{\epsilon\leq X_1\}}+1_{\{\epsilon\geq X_1\}}}{\mathbb{E}^{\uparrow}((\epsilon/X_1)^{\gamma}1_{\{\epsilon\leq X_1\}})+\mathbb{P}^{\uparrow}(\epsilon\geq X_1)}\right)\,.$$

D'autre part, Monrad et Silverstein [28], (3.18) ont montré que

$$\underline{n}(X_1\leq\epsilon\,,\,1<\zeta)\sim(cste)\cdot\epsilon^{1+\alpha\rho}\qquad(\epsilon\to 0+).$$

Nous en déduisons via 8 que

$$\mathbb{P}^{\uparrow}(X_1\leq\epsilon)\sim(cste)\cdot\epsilon^{1+\alpha}\qquad(\epsilon\to 0+)\,,$$

et puisque $\gamma<1+\alpha$, on a,

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\mathbb{E}^{\uparrow}(F\,|\,X_1-\underline{\underline{X}}_1\leq\epsilon)\geq\mathbb{E}^{\uparrow}(X_1^{-\gamma}\mathbb{E}^{\uparrow}(1/X_1^{\gamma})^{-1}F)=\mathbb{E}^{\uparrow}(\Gamma(\rho)h(X_1)^{-1}F)\,.$$

Il vient de 1 et 8 que $\mathbb{E}^{\uparrow}(\Gamma(\rho)h(X_1)^{-1})=1$. Alors en remplaçant F par $1-F$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\mathbb{E}^{\uparrow}(F\,|\,X_1-\underline{\underline{X}}_1\leq\epsilon)\leq\mathbb{E}^{\uparrow}(X_1^{-\gamma}\mathbb{E}^{\uparrow}(1/X_1^{\gamma})^{-1}F)=\mathbb{E}^{\uparrow}(\Gamma(\rho)h(X_1)^{-1}F)\,.$$

On conclut alors grâce au théorème précédent.

Pour montrer l'assertion 2_-, rappelons, (comme cela a déjà été remarqué en [13], section 3) que l'ensemble des zéros du processus $X-\underline{\underline{X}}$ est régénératif et que, par conséquent, l'on peut construire sur cet ensemble un temps local que nous noterons $\underline{\underline{L}}$ ainsi qu'une mesure de sortie de 0 au sens de Maisonneuve, [25], notée $\underline{\underline{n}}$. Soit H un processus $\mathcal{F}_t$-prévisible. La projection duale prévisible du temps local $\underline{\underline{L}}$ sur la filtration canonique a été calculée en [13], prop. 1, et d'après ce résultat, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\uparrow}(H_{\underline{\underline{g}}_1}) &= \mathbb{E}^{\uparrow}\left(\int_0^1 H_s\underline{\underline{n}}(1-s<\zeta)\,d\underline{\underline{L}}_s\right) \\
&= \mathbb{E}^{\uparrow}\left(\int_0^1 H_s h(X_s)^{-1}\underline{\underline{n}}(1-s<\zeta)\,ds\right)\,.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire, en vertu de 3 et du théoréme précédent

$$\mathbb{E}^{\uparrow}(H_{\underline{\underline{g}}_1}) = \int_0^1 \mathbb{P}^{(m,s)}(H_s)\underline{\underline{n}}(1-s<\zeta)\underline{n}(s<\zeta)\,ds\,.$$

Nous avons ainsi montré que sous $\mathbb{P}^{\uparrow}$, conditionnellement à $\underline{\underline{g}}_1 = t$, $t \le 1$, le processus

$$(\{X_s\,,\ 0 \le s \le \underline{\underline{g}}_1\}, \mathbb{P}^{\uparrow})$$

a la loi du méandre de longueur t. Le reste se déduit aisément de la propriété de scaling. □

On déduit du résultat de Millar [27] qu'un processus stable qui possède des sauts négatifs ne rampe pas vers le bas, c'est à dire que pour tout $x<0$, $\mathbb{P}(X_{\tau_{(-\infty,x)}} < x) = 1$. Ceci a pour conséquence que le processus X sous $\mathbb{P}$ n'atteint un nouveau minimum que par des sauts presque sûrement. L'excursion générique du processus $X - \underline{X}$ se termine alors presque toujours par un saut et il en va évidemment de même pour l'excursion normalisée. Cette dernière a donc une trajectoire sur $[0,1)$ issue de 0 et dont la valeur de sortie est strictement positive. Une telle description fait penser à la trajectoire du méandre de longueur 1. Nous allons montrer, en effet, que conditionnellement à leur valeur de sortie, les processus $(X, \mathbb{P}^{(e)})$ et $(X, \mathbb{P}^{(m)})$ ont même loi.

Théorème 3 *Supposons que le processus* $(X, \mathbb{P})$ *ait des sauts négatifs, alors la loi* $\mathbb{P}^{(e)}$ *est absolument continue par rapport à la loi* $\mathbb{P}^{(m)}$ *:*
Pour tout $t<1$ *et tout* $\Lambda \in \mathcal{F}_t$*,*

$$\mathbb{P}^{(e)}(\Lambda) = \mathbb{P}^{(m)}(c_3 X_1^{-\alpha} 1_{\Lambda})\,,$$

où c_3 *est une constante de normalisation.*
On en déduit que les processus $(X, \mathbb{P}^{(e)})$ *et* $(X, \mathbb{P}^{(m)})$ *ont même loi conditionnellement à leur valeur de sortie :*

$$\mathbb{P}^{(e)}(\,.\,|\,X_{1-} = x) = \mathbb{P}^{(m)}(\,.\,|\,X_{1-} = x)\,,\quad x>0\,.$$

On entend ici par valeur de sortie la limite à gauche de ces processus au temps 1. Nous nous permettons cet abus de langage car par définition, l'excursion normalisée prend toujours la valeur 0 au temps 1 alors qu'en ce qui concerne le méandre : $\mathbb{P}^{(m)}(X_1 = X_{1-}) = 1$.

Preuve. Soient $t < 1$ et $\Lambda \in \mathcal{F}_t$. Rappelons la caractérisation de la loi $\mathbb{P}^{(e)}$ que nous avions donnée à la section 2.1 :

$$\mathbb{P}^{(e)}(\Lambda) = \lim_{\epsilon \to 0} \underline{n}(\Lambda \,|\, 1 \leq \zeta \leq 1 + \epsilon)\,.$$

On a

$$\begin{aligned} \underline{n}(\Lambda \,|\, 1 \leq \zeta \leq 1 + \epsilon) &= \underline{n}\left(1_\Lambda 1_{\{1<\zeta\}} \frac{\mathbb{P}_{X_1}(\tau_{(-\infty,0)} \leq \epsilon)}{\underline{n}(1 \leq \zeta \leq 1+\epsilon)}\right) \\ &= \mathbb{E}^{\uparrow}\left(\frac{1_\Lambda}{h(X_1)} \frac{\mathbb{P}_{X_1}(\tau_{(-\infty,0)} \leq \epsilon)}{\underline{n}(1 \leq \zeta \leq 1+\epsilon)}\right)\,. \end{aligned}$$

D'autre part, Bingham [10], théorème 4a a montré que si $\gamma < 1$ (condition équivalente au fait que (X,$\mathbb{P}$) posséde des sauts négatifs) alors

$$\mathbb{P}(\underline{X}_t \leq -x) \sim (cste) \cdot t x^{-\alpha}\,, \qquad (x \to +\infty)\,,$$

ce qui entraîne

$$\mathbb{P}_x(\tau_{(-\infty,0)} \leq \epsilon) \sim (cste) \cdot \epsilon x^{-\alpha}\,, \qquad (\epsilon \to 0)\,. \quad (i)$$

Il vient de l'expression de la loi de ζ sous $\underline{n}$ que

$$\underline{n}(1 \leq \zeta \leq 1 + \epsilon) \sim (cste) \cdot \epsilon\,, \qquad (\epsilon \to 0)\,. \quad (ii)$$

Soit maintenant $\epsilon' > 0$ alors

$$\underline{n}(\Lambda, \{X_1 > \epsilon'\} \,|\, 1 \leq \zeta \leq 1 + \epsilon) = \mathbb{E}^{\uparrow}\left(\frac{1_\Lambda}{h(X_1)} 1_{\{X_1 > \epsilon'\}} \frac{\mathbb{P}_{X_1}(\tau_{(-\infty,0)} \leq \epsilon)}{\underline{n}(1 \leq \zeta \leq 1+\epsilon)}\right)$$

et $\mathbb{P}^{\uparrow} - p.s.$,

$$1_{\{X_1 > \epsilon'\}} \mathbb{P}_{X_1}(\tau_{(-\infty,0)} \leq \epsilon) \leq \mathbb{P}_{\epsilon'}(\tau_{(-\infty,0)} \leq \epsilon)\,.$$

Il découle alors de (i), (ii) et du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{E}^{\uparrow}\left(\frac{1_\Lambda}{h(X_1)} 1_{\{X_1 > \epsilon'\}} \frac{\mathbb{P}_{X_1}(\tau_{(-\infty,0)} \leq \epsilon)}{\underline{n}(1 \leq \zeta \leq 1+\epsilon)}\right) = \mathbb{E}^{\uparrow}\left(\frac{1_\Lambda}{h(X_1)} 1_{\{X_1 > \epsilon'\}} (\mathrm{cste}) X_1^{-\alpha}\right)\,.$$

Nous avons établi que

$$\underline{n}(\Lambda, \{X_1 > \epsilon'\} \,|\, \zeta = 1) = \mathbb{E}^{\uparrow}\left(\frac{1_\Lambda}{h(X_1)} 1_{\{X_1 > \epsilon'\}} (\mathrm{cste}) X_1^{-\alpha}\right)$$

d'où l'on déduit, en faisant tendre ϵ' vers 0 et par convergence monotone que

$$\mathbb{P}^{(e)}(\Lambda) = \mathbb{E}^{\uparrow}\left(\frac{1_\Lambda}{h(X_1)} (\mathrm{cste}) X_1^{-\alpha}\right) = \mathbb{P}^{(m)}(1_\Lambda (\mathrm{cste}) X_1^{-\alpha})\,.$$

Nous noterons c_2 la constante de normalisation.

Remarquons que cette identité n'est vraie que pour $t<1$ car, comme nous l'avons déjà remarqué, $X_1=0$, $\mathbb{P}^{(e)}-p.s.$ alors que $X_1>0$, $\mathbb{P}^{(m)}-p.s.$ Toutefois, il vient de sa définition que le méandre ne possède presque sûrement pas de saut au temps 1, nous pouvons donc écrire

$$\mathbb{P}^{(e)}(\Lambda)=\mathbb{P}^{(m)}(1_\Lambda c_2 X_{1-}^{-\alpha})\,.$$

Enfin, on a pour toute fonction borélienne et positive g,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{(e)}(1_\Lambda g(X_{1-})) &= \mathbb{P}^{(e)}(\mathbb{P}^{(e)}(1_\Lambda\,|\,X_{1-})g(X_{1-}))\\ &= \mathbb{P}^{(m)}(\mathbb{P}^{(e)}(1_\Lambda\,|\,X_{1-})g(X_{1-})c_2X_{1-}^{-\alpha})\\ &= \mathbb{P}^{(m)}(\mathbb{P}^{(m)}(1_\Lambda\,|\,X_{1-})g(X_{1-})c_2X_{1-}^{-\alpha})\,.\end{aligned}$$

On tire de ceci que $\mathbb{P}^{(m)}-p.s.$, $\mathbb{P}^{(m)}(1_\Lambda\,|\,X_{1-})=\mathbb{P}^{(e)}(1_\Lambda\,|\,X_{1-})$ ce qui entraîne la seconde partie de la proposition. $\square$

4 Une extension de la transformation de Vervaat.

Dans cette section, nous allons présenter une relation trajectorielle entre le processus conditionné à revenir en 0 au temps 1 sous $\mathbb{P}$ et le même processus sous $\mathbb{P}^\uparrow$. Dans chacun des deux cas, ces processus seront appelés des ponts. Rappelons (voir par exemple Fitzsimmons, Pitman et Yor [19]) que, sous $\mathbb{P}$, le pont de l'état 0 à lui-même de longueur t est une loi sur $\mathcal{D}([0,t])$ définie sur chaque tribu $\mathcal{F}_s$, $s<t$ par

$$\mathbb{P}^t_{0,0}(\Lambda):=\mathbb{E}\left(\frac{p_{t-s}(-X_s)}{p_t(0)}1_\Lambda\right)\,,\quad \Lambda\in\mathcal{F}_s\,. \tag{9}$$

Il est connu que $(X,\mathbb{P}^t_{0,0})$ est un processus fortement markovien dont la loi est une version régulière de la loi conditionnelle $\mathbb{P}(\,.\,|\,X_t=0)$. En particulier, $\mathbb{P}^t_{0,0}(X_0=0\,,\,X_t=0)=1$. Cette loi correspond aussi à la limite

$$\mathbb{P}^t_{0,0}(\cdot)=\lim_{\epsilon\to0}\mathbb{P}(\cdot\,|\,0\le X_t\le\epsilon)\,, \tag{10}$$

(voir Bertoin [6], ch. VIII). C'est d'ailleurs à cette représentation de la loi du pont que nous allons faire référence dans la suite. Signalons aussi une construction trajectorielle du pont lorsque 0 est non polaire, c'est à dire quand $\alpha>1$: soit g_1 le dernier zéro avant 1 du processus X, alors il est démontré en [14] que sous $\mathbb{P}$ le processus suivant a pour loi $\mathbb{P}^1_{0,0}$ et est indépendant de g_1,

$$\{g_1^{-1/\alpha} X_{g_1 s}\,,\, 0 \le s \le 1\}\,.$$

Remarquons enfin que la loi du pont de longueur $t > 0$ quelconque se déduit de celle du pont de longueur 1 simplement par scaling.

Nous introduisons maintenant la loi du pont sous $\mathbb{P}^\uparrow$ de 0 à 0 dont la définition formelle donnée en [19] pose un problème car le semi-groupe $p_t^\uparrow(x,y)$ introduit en 7 n'est pas défini pour $x = y = 0$. En fait, nous allons définir cette loi comme celle du processus canonique sous $\mathbb{P}^\uparrow$ conditionné à revenir en 0 au temps t.

Désignons par $(j_t)_{t>0}$ la loi d'entrée sous la mesure $\underline{n}$, (i. e. pour tout $t > 0$, j_t est la fonction définie par

$$\underline{n}(f(X_t)1_{\{t<\zeta\}}) = \int_0^\infty f(x) j_t(x)\,dx\,,$$

où f est une fonction borélienne et bornée quelconque.) D'après [28], lemme 3.2, pour tout $t > 0$, $j_t(x) = t^{\rho-1/\alpha-1} j_1(t^{-1/\alpha}x)$. Pour tout $t > 0$, j_t est une fonction intégrable. De plus, celle-ci appartient à L^∞. En effet, on vérifie facilement que pour tout $x > 0$ et pour λ-presque tout $y > 0$, (λ étant la mesure de Lebesgue), $q_t(x,y) \le p_t(x,y)$. D'autre part, par définition de j_t, on a $j_t(y) = \int_0^\infty j_s(x) q_{t-s}(x,y)\,dx$ pour λ-presque tout $y > 0$. Le résultat est alors une conséquence du fait que p_t est une fonction bornée.

Précisons que dans tout ce qui suit, tout ce qui est marqué d'une $*$ se rapporte au processus dual $(X^*, \mathbb{P}) = (-X, \mathbb{P})$.

Lemme 2 *Soit $t > 0$ fixé alors pour tout $s < t$ et $\Lambda \in \mathcal{F}_s$,*

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0+} \mathbb{P}^\uparrow(\Lambda \,|\, 0 \le X_t \le \epsilon) &= \mathbb{E}^\uparrow\left(1_\Lambda c_t \frac{j^*_{t-s}(X_s)}{h(X_s)}\right)\\ &= \underline{n}(1_\Lambda c_t j^*_{t-s}(X_s),\, s < \zeta)\,,\end{aligned}$$

où $c_t = (t/2)^{1+1/\alpha}(\int_0^\infty j_1(y) j_1^*(y)\,dy)^{-1}$.

Preuve. D'après la propriété de Markov appliquée au temps s,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^\uparrow(\Lambda \,|\, X_t \le \epsilon) &= \frac{1}{\mathbb{P}^\uparrow(X_t \le \epsilon)} \mathbb{E}^\uparrow(1_\Lambda \mathbb{P}^\uparrow_{X_s}(X_{t-s} \le \epsilon))\\ &= \frac{1}{\int_0^\epsilon h(x) j_t(x)\,dx} \int_0^\epsilon \mathbb{E}^\uparrow\left(1_\Lambda \frac{h(x)}{h(X_s)} q_{t-s}(X_s, x)\right) dx\,.\end{aligned}$$

Or, d'une part, d'après Monrad et Sylverstein [28], (3.18) :

$$\int_0^\epsilon h(x)j_t(x)\,dx \sim c_t^{-1}\epsilon^{\alpha+1}\,, \quad (\epsilon \to 0+)\,.$$

D'autre part, on déduit du lemme 1, 2_ que pour toute fonction continue et bornée f,

$$\lim_{x\to 0+} \mathbb{E}_x^\uparrow(h(X_t)^{-1}f(X_t)) = \mathbb{E}^\uparrow(h(X_t)^{-1}f(X_t))\,,$$

et donc, d'après 8,

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^\infty f(y)\frac{q_t(x,y)}{h(x)}\,dy = \int_0^\infty f(y)j_t(y)\,dy\,.$$

Soit par dualité,

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^\infty f(y)\frac{q_t^*(x,y)}{h^*(x)}\,dy = \int_0^\infty f(y)j_t^*(y)\,dy\,.$$

Par le théorème des classes monotones, cette convergence s'étend aisément à toute fonction f borélienne et bornée, (i.e. les fonctions $y \to q_t^*(x,y)/h^*(x)$ convergent faiblement dans L_1 vers $y \to j_t^*(y)$ lorsque x tend vers 0). Il découle de ceci que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}\mathbb{E}^\uparrow\left(1_\Lambda\frac{q_{t-s}(X_s,x)}{h(X_s)h^*(x)}\right) &= \lim_{x\to 0+}\int_0^\infty \mathbb{P}^\uparrow(\Lambda\,|\,X_s=y)j_s(y)\frac{q_{t-s}(y,x)}{h^*(x)}\,dy \\
&= \lim_{x\to 0+}\int_0^\infty \mathbb{P}^\uparrow(\Lambda\,|\,X_s=y)j_s(y)\frac{q_{t-s}^*(x,y)}{h^*(x)}\,dy \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}^\uparrow(\Lambda\,|\,X_s=y)j_s(y)j_{t-s}^*(y)\,dy \\
&= \mathbb{E}^\uparrow\left(1_\Lambda\frac{j_{t-s}^*(X_s)}{h(X_s)}\right)\,.
\end{aligned}$$

Cette convergence et le fait que $h^*(x)/h(x) = x^\alpha$ permettent alors de conclure que

$$\int_0^\epsilon \mathbb{E}^\uparrow\left(1_\Lambda\frac{h(x)}{h(X_s)}q_{t-s}(X_s,x)\right)dx \sim \epsilon^{\alpha+1}\mathbb{E}^\uparrow\left(1_\Lambda\frac{j_{t-s}^*(X_s)}{h(X_s)}\right)\,, \quad (\epsilon\to 0+)\,,$$

et

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\mathbb{P}^\uparrow(\Lambda\,|\,0\le X_t\le\epsilon) = \mathbb{E}^\uparrow\left(1_\Lambda c_t\frac{j_{t-s}^*(X_s)}{h(X_s)}\right)\,.$$

Le calcul de la constante c_t vient alors de l'égalité $\mathbb{E}^\uparrow\left(c_t\frac{j_{t-s}^*(X_s)}{h(X_s)}\right) = 1$ considérée pour $s = t/2$ et de la propriété de scaling sous $\mathbb{P}^\uparrow$. □

Nous appellerons loi du pont sous $\mathbb{P}^\uparrow$ de longueur t et valant 0 au temps t la mesure de probabilité sur $\mathcal{D}([0,t])$ définie par :

$$\mathbb{P}_{0,0}^{\uparrow,t}(\Lambda) := \mathbb{E}^\uparrow\left(1_\Lambda c_t\frac{j_{t-s}^*(X_s)}{h(X_s)}\right)\,, \quad s<t\,, \quad \Lambda\in\mathcal{F}_s\,. \tag{11}$$

De même que sous $\mathbb{P}$, la loi du pont sous $\mathbb{P}^{\uparrow}$ de longueur $t>0$ peut se déduire de celle du pont de longueur 1 par scaling.

Remarque 1 *Il est facile de vérifier que lorsque $(X,\mathbb{P})$ n'a pas de saut négatif, la loi $\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0}$ est égale à la loi $\mathbb{P}^{(e)}$ d'une excursion normalisée. D'une manière générale, on peut montrer que $\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0}$ est la loi d'une excursion normalisée et conditionnée à mourir en 0 au sens suivant :*

$$\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0}(\cdot) = \lim_{\epsilon\to 0+} \mathbb{P}^{(e)}(\cdot \,|\, 0 \le X_{1-} \le \epsilon)\,.$$

Nous allons maintenant établir l'analogue de la transformation de Vervaat [30], pour des processus stables. Dans le cas brownien, celle-ci consiste à obtenir la trajectoire d'une excursion normalisée par une interversion des parties pré et post-minimum d'un pont de longueur 1. La loi de l'excursion normalisée correspond alors à $\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0}$ et, d'une manière générale, pour des processus stables, cette identité n'a lieu qu'en l'absence de saut négatif. Toutefois, comme nous allons le montrer, une relation telle que celle de Vervaat a toujours lieu entre les ponts $(X,\mathbb{P}^1_{0,0})$ et $(X,\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0})$. Enonçons dès maintenant ce résultat. On rappelle que m désigne l'unique temps d'atteinte du minimum absolu du pont $(X,\mathbb{P}^1_{0,0})$.

Théorème 4 *Soient $\mathbb{P}^1_{0,0}$ et $\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0}$ les lois définies respectivement en 9 et 11.*
1_ Sous la loi $\mathbb{P}^1_{0,0}$, m est uniformément distribué sur $[0,1]$, le processus

$$\{X_{m+t \pmod 1} - X_m\,,\ 0\le t\le 1\}$$

suit la loi $\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0}$ et est indépendant de m.
2_ Inversement, si U est une variable indépendante de $(X,\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0})$ et uniformément distribuée sur $[0,1]$ alors, sous $\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0}$, le processus

$$\{X_{U+t \pmod 1} - X_U\,,\ 0\le t\le 1\}$$

suit la loi $\mathbb{P}^1_{0,0}$.

Nous allons reprendre les arguments de la démonstration qu'a donné Biane en [7] dans le cas du mouvement brownien. Ainsi, nous n'allons pas prouver ce résultat directement sous les mesures $\mathbb{P}^1_{0,0}$ et $\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0}$ qui ont pour inconvénient d'être des lois markoviennes non homogènes. La preuve qui suit consiste à "randomiser" le temps de vie des processus $(X,\mathbb{P}^1_{0,0})$ et $(X,\mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0})$ de façon à les rendre homogènes.

Figure 1: Relation entre pont sous $\mathbb{P}$ et pont sous $\mathbb{P}^{\uparrow}$.

Rappelons, comme cela a été montré par Silverstein [29], que la fonction h', (dérivée de h), est harmonique pour le semi-groupe $(q_t)_{t\geq 0}$. La loi du h-processus associé à cette fonction est définie comme nous l'avons fait pour $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$ en 6 par

$$\mathbb{P}_x^{\searrow}(\Lambda, t<\zeta) := \frac{1}{h'(x)}\mathbb{E}_x^{(0,\infty)}(h'(X_t)1_{\Lambda}1_{\{t<\zeta\}})\,, x>0\,,\quad t\geq 0\,,\quad \Lambda\in\mathcal{F}_t\,.$$

Cette loi a été introduite en [13] où il est montré qu'elle correspond au processus $(X,\mathbb{P}_x)$ conditionné à mourir en 0.

Lemme 3 *Soit H, un processus prévisible, alors*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty H_s\, d\underline{L}_s\right) = \int_0^\infty \mathbb{E}_x^{\searrow}(H_\zeta(\omega - x))\, h'(x)dx\,.$$

Preuve. On rappelle que $\underline{\tau}$ désigne l'inverse continu à droite du temps local en 0 du processus réfléchi par rapport à son minimum et que $\overline{n}$ est la mesure des excursions en dehors de 0 du processus réfléchi par rapport à son maximum, $\overline{X}-X$, sous $\mathbb{P}$.

Il vient de la propriété d'invariance par retournement du temps du processus $(X,\mathbb{P})$ que, sous $\mathbb{P}$, les processus $\{X_s - X_{\underline{g}_t}\,,\ 0\leq s<\underline{g}_t\}$ et $\{X_{\overline{g}_t} - X_{(t-s)-}\,,\ 0\leq s<t-\overline{g}_t\}$ sont égaux

en loi. Alors, pour toute fonctionnelle mesurable et bornée F et pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda \overline{g}_t} F(\{X_{\overline{g}_t} - X_{(t-s)-}\,,\, 0 \le s < t - \overline{g}_t\})\,dt\right) \\
= \;& \mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda (t-\underline{g}_t)} F(\{X_s - X_{\underline{g}_t}\,,\, 0 \le s < \underline{g}_t\})\,dt\right)\,.
\end{aligned}$$

En appliquant la formule de sortie de Maisonneuve à chacun des deux membres de cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda \overline{\tau}_s}\,ds\right) \overline{n}\left(\int_0^\zeta F(\{X_{(t-s)-}\,,\, 0 \le s < t\})\,dt\right) \\
= \;& \mathbb{E}\left(\int_0^\infty F(\{X_u - X_{\underline{\tau}_s}\,,\, 0 \le u < \underline{\tau}_s\})\,ds\right) \underline{n}\left(\int_0^\zeta e^{-\lambda s}\,ds\right)\,,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty F(\{X_u - X_s\,,\, 0 \le u < s\})\,d\underline{L}_s\right) = \overline{n}\left(\int_0^\zeta F(\{X_{(t-s)-}\,,\, 0 \le s < t\})\,dt\right)\,.$$

Le second membre de cette expression s'exprime

$$\begin{aligned}
\overline{n}\left(\int_0^\zeta F(\{X_{(t-s)-}\,,\, 0 \le s < t\})\,dt\right) &= \overline{n}\left(\int_0^\zeta F(\theta_{\zeta-t}(\{X_{(\zeta-s)-}\,,\, 0 \le s < \zeta\}))\,dt\right) \\
&= \overline{n}\left(\int_0^\zeta F(\theta_t(\{X_{(\zeta-s)-}\,,\, 0 \le s < \zeta\}))\,dt\right) \\
&= \int_0^\infty \overline{n}(F(\theta_t(\{X_{(\zeta-s)-}\,,\, 0 \le s < \zeta\}))\,,\, t < \zeta)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Notons, d'autre part, $\overset{\vee}{\overline{n}}$ la loi sous $\overline{n}$ du processus retourné $\{X_{(\zeta-s)-}\,,\, 0 \le s < \zeta\}$. Alors, d'après la propriété de Markov en t sous cette mesure et le lemme 3 de [13],

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \overline{n}(F(\theta_t(\{X_{(\zeta-s)-}\,,\, 0 \le s < \zeta\}))\,,\, t < \zeta)\,dt &= \int_0^\infty \overset{\vee}{\overline{n}}\,(F \circ \theta_t\,,\, t < \zeta)\,dt \\
&= \int_0^\infty \overset{\vee}{\overline{n}}\,(\mathbb{E}^{\searrow}_{X_t}(F)\,,\, t < \zeta)\,dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}^{\searrow}_x(F) \int_0^\infty \overset{\vee}{\overline{n}}\,(X_t \in dx\,,\, t < \zeta)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Enfin, grâce à 5, et par dualité, on montre que

$$\int_0^\infty \overset{\vee}{\overline{n}}\,(X_t \in dx\,,\, t < \zeta)\,dt = \int_0^\infty \overline{n}(X_t \in dx\,,\, t < \zeta)\,dt = h'(x)\,dx\,,$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Introduisons maintenant la mesure $\underset{\sim}{n}$, h-transformée de la mesure $\underline{n}$ par la fonction h',

$$\underset{\sim}{n}(\Lambda\,,\, t < \zeta) := \underline{n}(1_\Lambda h'(X_t) 1_{\{t<\zeta\}})\,,\quad t \ge 0\,,\quad \Lambda \in \mathcal{F}_t\,.$$

Il est facile de vérifier que cette expression définit une mesure markovienne de semi-groupe

$$\frac{h'(y)}{h'(x)}q_t(x,y)\,,\quad t\geq 0\,,\quad x,\,y>0\,.$$

Autrement dit, pour toute fonctionnelle mesurable F:

$$\underset{\sim}{n}(1_\Lambda F\circ\theta_t 1_{\{t<\zeta\}})=\underset{\sim}{n}(1_\Lambda \mathbb{E}^{\searrow}_{X_t}(F)1_{\{t<\zeta\}})\,,\quad t\geq 0\,,\quad \Lambda\in\mathcal{F}_t\,.$$

D'autre part, le temps de vie du processus canonique sous cette mesure est presque sûrement fini. La remarque précédente et le lemme suivant permettent de considérer la loi $\underset{\sim}{n}$ ainsi définie comme celle de l'excursion en dehors de 0 du processus réfléchi $X-\underline{X}$ conditionnée à mourir en 0.

Lemme 4 *Pour tout $t>0$, la loi $\mathbb{P}^{\uparrow,t}_{0,0}$ est une version régulière de la loi conditionnelle $\underset{\sim}{n}(\,\cdot\,|\,\zeta=t)$, i.e.,*

$$\mathbb{P}^{\uparrow,t}_{0,0}(\Lambda)=\underset{\sim}{n}(\Lambda\,|\,\zeta=t)\,,\quad s<t\,,\quad \Lambda\in\mathcal{F}_t\,.$$

Preuve. Il suffit de noter d'une part que pour tout $x>0$, on a

$$\int_0^\infty j^*_t(x)\,dt=h'(x)\,,$$

(ceci vient de l'expression du potentiel sous $\underline{n}^*$ déterminée en [29], (3.3)). D'autre part, par définition de $\underset{\sim}{n}$ et d'après 8 :

$$\underset{\sim}{n}(t<\zeta)=\mathbb{E}^\uparrow(h'(X_t)/h(X_t))=\alpha(1-\rho)\mathbb{E}^\uparrow(X_1^{-1})t^{-1/\alpha}\,.$$

Ainsi, pour tout $s>0$ et $\Lambda\in\mathcal{F}_s$ on a

$$\begin{aligned}\int_s^\infty \mathbb{P}^{\uparrow,t}_{0,0}(\Lambda)\,d\underset{\sim}{n}(t<\zeta)&=\mathbb{E}^\uparrow\left(\frac{1_\Lambda}{h(X_s)}\int_s^\infty j^*_{t-s}(X_s)\,dt\right)\\&=\mathbb{E}^\uparrow\left(1_\Lambda\frac{h'(X_s)}{h(X_s)}\right)\\&=\underset{\sim}{n}(\Lambda\,,\,s<\zeta)\,,\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de 8 et de la définition de $\underset{\sim}{n}$. □

Preuve du théorème. Donnons nous F un processus prévisible, positif et borné et H une fonctionnelle mesurable positive et bornée. Nous allons calculer de deux manières différentes la limite lorsque ϵ tend vers 0 de l'expression:

$$\int_0^\infty \frac{\mathbb{P}(|X_t|<\epsilon)}{2\epsilon}\mathbb{E}(F_{\underline{g}_t}(\omega-\omega_{\underline{g}_t})\,H\circ k_{t-\underline{g}_t}\circ\theta'_{\underline{g}_t}\,|\,|X_t|<\epsilon)\,dt\,.$$

Utilisons d'une part la relation 10 de convergence de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\,.\, |\, |X_t| < \epsilon)$ vers la loi $\mathbb{P}^t_{0,0}$ d'un pont de longueur t. Par le théorème de convergence dominée et puisque

$\lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{P}(|X_t| < \epsilon)/2\epsilon = p_t(0)$, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{\mathbb{P}(|X_t|<\epsilon)}{2\epsilon}\mathbb{E}(F_{\underline{g}_t}(\omega-\omega_{\underline{g}_t})\, H\circ k_{t-\underline{g}_t}\circ\theta'_{\underline{g}_t}\,|\,|X_t|<\epsilon)\,dt =$$
$$\int_0^\infty \mathbb{P}^t_{0,0}(F_{\underline{g}_t}(\omega-\omega_{\underline{g}_t})\, H\circ k_{t-\underline{g}_t}\circ\theta'_{\underline{g}_t})p_t(0)\,dt\,.$$

D'autre part, en appliquant d'abord Fubini puis la formule de sortie de Maisonneuve, il vient

$$\int_0^\infty \frac{\mathbb{P}(|X_t|<\epsilon)}{2\epsilon}\mathbb{E}(F_{\underline{g}_t}(\omega-\omega_{\underline{g}_t})\, H\circ k_{t-\underline{g}_t}\circ\theta'_{\underline{g}_t}\,|\,|X_t|<\epsilon)\,dt =$$
$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \frac{1}{2\epsilon}F_{\underline{g}_t}(\omega-\omega_{\underline{g}_t})\, H\circ k_{t-\underline{g}_t}\circ\theta'_{\underline{g}_t}\,1_{\{|X_{\underline{g}_t}+X_{t-\underline{g}_t}\circ\theta'_{\underline{g}_t}|<\epsilon\}}\,dt\right) =$$
$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \frac{1}{2\epsilon}F_t(\omega-\omega_t)1_{\{|\omega_t+\omega'_s|<\epsilon\}}\,d\underline{L}_t\,\underline{n}\left(\int_0^\zeta H\circ k_s(\omega')\,ds\right)\right) =$$
$$\underline{n}\left(\int_0^\zeta \frac{1}{2\epsilon}\mathbb{E}\left(\int_0^\infty F_t(\omega-\omega_t)\,1_{\{|\omega_t+\omega'_s|<\epsilon\}}d\underline{L}_t\right)H\circ k_s(\omega')\,ds\right)\,.$$

ω' désigne ici l'intégrant associé à la mesure $\underline{n}$. Par le lemme 3, nous avons alors

$$\underline{n}\left(\int_0^\zeta \frac{1}{2\epsilon}\mathbb{E}\left(\int_0^\infty F_t(\omega-\omega_t)\,1_{\{|\omega_t+\omega'_s|<\epsilon\}}d\underline{L}_t\right)H\circ k_s(\omega')\,ds\right)$$
$$\underline{n}\left(\int_0^\zeta \frac{1}{2\epsilon}\int_{|\omega'_s-x|<\epsilon}\mathbb{E}^{\searrow}_x(F_\zeta(\omega))h'(x)\,dx\,H\circ k_s(\omega')\,ds\right)\,.$$

Et par un argument de convergence dominée, on obtient, en faisant tendre ϵ vers 0 :

$$\begin{aligned}\underline{n}\left(\int_0^\zeta h'(X_s)\mathbb{E}^{\searrow}_{X_s}(F_\zeta)H\circ k_s\,ds\right) &= \underset{\sim}{n}\left(\int_0^\zeta \mathbb{E}^{\searrow}_{X_s}(F_\zeta)H\circ k_s\,ds\right)\\ &= \underset{\sim}{n}\left(\int_0^\zeta H\circ k_sF_\zeta\circ\theta_s\,ds\right)\,,\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de la propriété de Markov de la mesure $\underset{\sim}{n}$.

Enfin, conditionnant par la durée de vie dans chacune de ces expressions, on déduit que pour presque tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^t_{0,0}(F_{\underline{g}_t}(\omega-\omega_{\underline{g}_t})H\circ k_{t-\underline{g}_t}\circ\theta'_{\underline{g}_t}) &= \int_0^t \underset{\sim}{n}(H\circ k_sF_\zeta\circ\theta'_s\,|\,\zeta=t)\,ds\\ &= \int_0^t \mathbb{P}^{\uparrow,t}_{0,0}(H\circ k_sF_t\circ\theta'_s)\,ds\,.\end{aligned}$$

Puis, grâce à la propriété de scaling, ceci est vrai pour $t = 1$, ce qui établi le théorème. $\square$

Il existe un autre lien trajectoriel entre les ponts $(X, \mathbb{P}^1_{0,0})$ et $(X, \mathbb{P}^{\uparrow,1}_{0,0})$ qui est une conséquence du lemme 3.7 de Bertoin, [6]. Dans cet article, il est montré que pour tout $t > 0$ fixé, le processus post-minimum de $(X, \mathbb{P}^t)$ a même loi que le processus obtenu en juxtaposant les excursions positives de $(X, \mathbb{P})$ avant t. De plus, le retourné du processus pré-minimum a même loi que le processus obtenu en juxtaposant les excursions négatives de $(X, \mathbb{P})$ avant t.

Posons

$$A_t^+ = \int_0^t 1_{\{X_s>0\}}\, ds \;\text{ et }\; A_t^- = \int_0^t 1_{\{X_s\le 0\}}\, ds\,,$$

et notons α^+ (resp. α^-) l'inverse continu à droite de A^+ (resp. A^-). Les processus obtenus en juxtaposant les excursions positives et négatives sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} X^\uparrow(t) &= \left(X_\cdot + \sum_{0<s\le\cdot}(1_{\{X_s\le 0\}}X^+_{s-} + 1_{\{X_s>0\}}X^-_{s-})\right)(\alpha^+(t)) \\ X^\downarrow(t) &= \left(X_\cdot - \sum_{0<s\le\cdot}(1_{\{X_s\le 0\}}X^+_{s-} + 1_{\{X_s>0\}}X^-_{s-})\right)(\alpha^-(t))\,. \end{aligned}$$

Notons enfin respectivement $\underset{\rightarrow}{X}$ et $\underset{\leftarrow}{X}$ le processus post-minimum et le processus pré-minimum du processus canonique.

Le résultat de Bertoin s'énonce ainsi,

Théorème 5 (Bertoin) *Supposons que $(X, \mathbb{P})$ désigne un processus de Lévy quelconque. Pour tout $t > 0$, les couples $(\underset{\rightarrow}{X}, -\underset{\leftarrow}{X})$ et $(X^\uparrow, X^\downarrow)$ ont même loi sous $\mathbb{P}^1_{0,0}$.*

Comme conséquence du théorème précédent, nous obtenons alors la transformation suivante.

Corollaire 1 *Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus stable quelconque. Sous la loi $\mathbb{P}^1_{0,0}$, le processus Y défini par*

$$\begin{aligned} Y_t &= X^\uparrow_t\,,\;\; 0\le t\le A_1^+ \\ Y_{(1-t)-} &= X^\downarrow_t\,,\;\; 0\le t\le A_1^- \end{aligned}$$

a pour loi $\mathbb{P}^{\uparrow,t}_{0,0}$.

Signalons que cette transformation a déjà été remarquée dans le cas brownien par Bertoin et Pitman, [5], théorème 5.3. D'autre part Knight, [23], et, dans un article plus récent, Fitzsimmons et Getoor, [18] ont montré que le minimum du pont de longueur 1 d'un processus de Lévy (vérifiant des hypothèses très générales) et son temps passé positif, sont uniformément distribués sur $[0, 1]$. Dans le cas stable, ceci est une conséquence du corollaire précédent.

Remerciements

Je tiens à remercier Jean Bertoin pour ses nombreux conseils qui ont permis la réalisation de ce travail.

References

[1] Belkin, B., *An Invariance Principle for Conditioned Recurrent Random Walk Attracted to a Stable Law,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 21 (1972), 45-64.

[2] Bertoin, J., *Sur la décomposition de la trajectoire d'un processus de Lévy spectralement positif en son infimum,* Ann. Inst. Henri Poincaré 27-4 (1991), 537-547.

[3] Bertoin, J., *An Extension of Pitman's Theorem for Spectrally Positive Lévy Processes,* Ann. Probab. 20-3 (1992), 1464-1483.

[4] Bertoin, J., *Splitting at the infimum and excursions in half-lines for random walks and Lévy processes.* Stoch. Proc. Appl. (1993), 17-35.

[5] Bertoin, J. and Pitman, J., *Path Transformations Connecting Brownian Bridge, Excursion and Meander,* Bull. Sc. Math. 2 ème série, 118 (1994).

[6] Bertoin, J., *An introduction to Lévy Processes* Livre en préparation au laboratoire de probabilité de l'universités Paris VI, (1995).

[7] Biane, P., *Relations entre pont brownien et excursion renormalisée du mouvement brownien,* Ann. Inst. Henri Poincaré 22 (1986), 1-7.

[8] Biane, P. and Yor, M., *Valeurs principales associées aux temps locaux browniens,* Bull. Sc. Math., 2ième série, 111, (1987), 23-101.

[9] Biane, P. and Yor, M., *Quelques précisions sur le méandre brownien,* Bull. Sc. math., 2 ème série 112 (1988), 101-109.

[10] Bingham, N., *Maxima of Sums of Random Variables and Suprema of Stable Processes,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 26 (1973), 273-296.

[11] Bingham, N., *Fluctuation Theory in Continuous Time,* Adv. Appl. Prob. 7 (1975), 705-766.

[12] Chaumont, L., *Sur certains processus de Lévy conditionnés à rester positifs,* Stochastics and Stochastics Reports, vol. 47, (1994), 1-20.

[13] Chaumont, L., *Conditionings and path decompositions for Lévy processes,* Prépublication No ? du laboratoire de Probabilités de l'université Paris VI, (1995).

[14] Chaumont, L., *Processus de Lévy et conditionnement,* Thèse de Doctorat de l'université Paris VI, (1994).

[15] Chaumont, L., *Excursion normalisée, pont et méandre pour les processus stables,* C.R. Acad. Sci. Paris, t. 318, Série I, (1994), 563-566.

[16] Chung, K.L., *Excursions in Brownian motion,* Ark., Mat., 14 (1976), 155-177.

[17] Doney, R.A., *Conditional Limit Theorems for Asymptotically Stable Random Walks,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 70 (1985), 351-360.

[18] Fitzsimmons, P., Getoor, R.K., *Occupation Time Distributions for Lévy Bridges and Excursions,* A paraître, (1995).

[19] Fitzsimmons, P., Pitman, J. and Yor, M., *Markovian Bridges: Construction, Palm Interpretation, and Splicing,* Seminar on Stochastic Processes, Birkhaüser (1993).

[20] Getoor, R.K., *Excursions of a Markov Process,* Ann. Probab. 7 (1979), 244-266.

[21] Imhof, J.P., *Density Factorizations for Brownian Motion, Meander and the Three-dimensional Bessel Process, and Applications,* J. Appl. Prob. 3 (1984), 500-510.

[22] Kesten, H., *Hitting Probability of Single Points for Processes with Stationary Independent Increments,* Mem. Amer. Math. Soc. No. 93 (1969).

[23] Knight, F.B, *The uniform law for exchangeable and Lévy process bridges,* à paraître, (1994).

[24] Liggett, T.M., *An Invariance Principle for Conditioned Sums of Independent Random Variables,* J. Math. Mech. Vol. 18 No. 6 (1968).

[25] Maisonneuve, B., *Processus de Markov: naissance, retournement, régénération,* Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XXI. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1541. Springer, Berlin Heidelberg New York (1974), 261-292.

[26] Marsalle, L., *Hausdorff measures and capacities for increase times of stable processes,* Article en préparation au Laboratoire de Probabilités de l'université Paris VI, (1995).

[27] Millar, P.W., *Exit Properties of Stochastic Processes with Stationary Independent Increments,* Trans. Amer. Math. Soc. 178 (1973), 459-479.

[28] Monrad, L. and Silverstein, M.L., *Stable Processes: Sample Function Growth at a Local Minimum,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 49, (1979), 177-210.

[29] Silverstein, M.L., *Classification of Coharmonic and Coinvariant functions for a Lévy process,* Ann. Probab. 8 (1980), 539-575.

[30] Vervaat, W., *A relation between Brownian bridge and Brownian excursion,* Ann. Probab. 7 (1979), 141-149.

[31] Zolotarev, V.M., *Mellin-Stieltjes transform in probability theory,* Theor. Probab. Appl. 2 (1957), 433-460.